ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI
1898

Quindi, se n supera 5, tra i detti invarianti passano necessariamente $\frac{1}{2}n(n-5)$ relazioni algebriche.

Ma di tali relazioni potrebbero esservene un maggiore numero nel caso che Γ sia un gruppo Kleiniano; giacchè allora i $3n$ parametri, da cui dipendono le sostituzioni fondamentali del detto gruppo, debbono, in generale, soddisfare a certe equazioni, non necessariamente algebriche, che intervengono quando si cerca di esprimere la discontinuità propria di Γ.

Fisica matematica. — *Sulla temperatura di un conduttore lineare bimetallico.* Nota I di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Per la parte della termodinamica che considera i fenomeni termoelettrici designati coi nomi dei loro scopritori Peltier e Thomson è di somma importanza conoscere la temperatura di un conduttore bimetallico percorso da una corrente. I fenomeni termoelettrici di Peltier e Thomson sono infatti riversibili e si può quindi loro applicare il secondo principio della termodinamica; ma per far questo rigorosamente è necessario di dedurre lo stato termico del conduttore tenendo conto di tutti i fenomeni di trasporto di calore prodotti dalle conducibilità termiche dei metalli componenti il circuito. Solo dopo aver stabilitc con tutta l'esattezza necessaria l'equazione esprimente la temperatura di ogni punto del conduttore, sarà possibile di dedurre un metodo di misura sicuro per determinare i coefficienti dei detti fenomeni termoelettrici, di eseguire per essi la verifica dei principî della termodinamica, come già si fece per gran parte degli altri fenomeni termici e finalmente di tentare la soluzione del problema delle relazioni fra i poteri conduttori termici ed elettrici, e gli effetti termoelettrici nei metalli.

Scopo della presente Nota e di alcune altre che si pubblicheranno nei prossimi Rendiconti è appunto la deduzione dello stato termico di un conduttore lineare bimetallico percorso da una corrente costante, dei fenomeni che si producono coll'inversioue della corrente e delle relative conseguenze.

Per non complicare troppo il problema supporremo le estremità del conduttore e l'aria ambiente mantenuta ad una temperatura costante che assumeremo come zero; questa supposizione, come la più facile da realizzare fisicamente ci faciliterà le applicazioni della teoria.

Deduzione dell'equazione differenziale. — Poniamo nell'asse di un conduttore lineare composto di due fili metallici di lunghezza l_1 ed l_2 l'asse delle ascisse. Indichiamo rispettivamente con x_1 ed x_2 le ascisse della prima e della seconda parte del filo, ponendo l'origine delle x_1 nell'estremità del primo filo e l'origine delle x_2 nel punto di contatto dei due fili. Siano rispettivamente k_1, h_1, c_1, ϱ_1, ω_1, σ_1 e k_2, h_2, c_2, ϱ_2, ω_2, σ_2 i coefficienti delle conducibilità termiche interna ed esterna, del calore specifico, delle densità, della resistenza elettrica e dell' effetto Thomson dei due fili; sia inoltre P il coefficiente dell' effetto Peltier al contatto dei due metalli. Ammettiamo, come è esperimentalmente dimostrato, che lo sviluppo del calore prodotto da questi due fenomeni termoelettrici sia proporzionale alla corrente i. Indichiamo con u_1 la temperatura del primo filo e con u_2 quella del secondo.

Immaginiamo completamente nel primo conduttore due sezioni corrispondenti alle ascisse x_1 ed $x_1 + dx_1$. Avremo allora da considerare nell' elemento così formato durante il tempo dt i seguenti fenomeni: 1° Un flusso di calore diretto verso l'interno causato dalla conducilità termica interna attraverso la sezione x_1. Esso sarà eguale a $-k_1 q \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt$, in cui q indica la sezione comune dei due fili; 2° Un flusso di calore diretto all' esterno attraverso la sezione $x_1 + dx_1$ espresso dalla quantità:

$$\left(k_1 + \frac{\partial k_1}{\partial x_1} dx_1\right) \quad q\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} dx_1\right) dt\,;$$

3° Un'emissione di calore attraverso la superficie in contatto coll' aria ambiente; sia p il perimetro comune ai due fili; il calore emesso sarà uguale a

$$p\left(h_1 + \frac{\partial h_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right)\left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right) dx_1\, dt\,;$$

4° Uno sviluppo di calore prodotto dalla corrente, detto effetto di Joule, uguale ad $\frac{i^2 \omega_1}{\mathrm{J}q} dx_1\, dt$, indicando con J l' equivalente meccanico del calore; 5° Un secondo sviluppo di calore prodotto dalla corrente, detto effetto Thomson, uguale ad

$$i\left(\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{dx_1} dx_1 + \cdots\right)\left(\frac{du_1}{dx_1} + \frac{d^2 u_1}{dx_1^2}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right) dx_1\, dt\,;$$

in questa espressione si è pure ammesso come dato esperimentale che l'effetto Thomson sia proporzionale alla caduta della temperatura dell' elemento di conduttore considerato. Tutto questo movimento e produzione di calore apporta una variazione nella quantità di calore dell' elemento uguale a:

$$q\varrho_1\left(c_1 + \frac{dc_1}{dx_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t\,.\,\partial x_1}\frac{dx_1}{2} + \cdots\right) dx_1\, dt\,.$$

Uguagliando i termini infinitesimi del secondo ordine e trascurando gli altri di ordine superiore, si avrà l' equazione differenziale:

$$qk_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1} + q\frac{\partial k_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - ph_1 u_1 + i\sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{i^2\omega_1}{\mathrm{J}q} = q\varrho_1 c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}$$

ossia

$$(\mathrm{I}) \qquad q\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+i\sigma_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-ph_1u_1+\frac{i^2\omega}{\mathrm{J}q}=q\varrho_1c_1\frac{\partial x_1}{\partial t}.$$

Le quantità k, h, ω, σ e c sono funzioni della temperatura; praticamente si considerano o costanti o funzioni lineari della temperatura; converrebbe però fare eccezione per la conducibilità esterna h, che si scosta sensibilmente dalla forma lineare; però, siccome nelle applicazioni dei metodi di misura si cerca sempre di rendere piccolissime le perdite di calore per conducibilità esterna, noi potremo assumere anche per h una forma lineare senza errore sensibile. Noi assumeremo dunque:

$$k=k_0(1+\alpha u)\,,\quad h=h_0(1+\beta u)\,,\quad \omega=\omega_0(1+\delta u)$$
$$\sigma=\sigma_0(1+\varepsilon u)\quad \text{e}\quad c=c_0(1+\eta u)\,.$$

L'equazione differenziale (I) si trasformerà allora nella seguente:

$$(\mathrm{II})\quad qh_{10}\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2}+qk_{10}\frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(u_1^2)}{\partial x_1^2}+i\sigma_{10}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+i\sigma_{10}\frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\partial(u_1^2)}{\partial x_1}-ph_{10}(u+\beta_1u_1^2)$$
$$+\frac{i^2\omega_{10}}{\mathrm{J}q}+\frac{i^2\omega_{10}}{\mathrm{J}q}\delta_1u_1=q\varrho_1c_{10}\frac{\partial u_1}{\partial t}+q\varrho_1c_{10}\frac{\eta_1}{2}\frac{\partial(u_1^2)}{\partial t}.$$

L'equazione per la seconda parte del conduttore si otterrà evidentemente mutando nell'equazione precedente l'indice 1 nell'indice 2.

Le soluzioni u_1 ed u_2 dovranno evidentemente soddisfare alle condizioni seguenti: 1) per $x_1=0$, $u_1=0$ per ogni t; 2) per $x_2=l_2$, $u_2=0$ per ogni t. Nel contatto poi dei due conduttori si avrà: u_1 per $x_1=l_1$ uguale a u_2 per $x_2=0$ in ogni t; noi converremo di scrivere questa condizione nella formula: 3) $(u_1)_{l_1}=(u_2)_0$.

Consideriamo ora nel contatto dei due fili il flusso di calore ed il fenomeno di Peltier che vi si produce. Per quanto abbiamo precedentemente detto avremo ancora la condizione:

$$4)\quad \left[k_{10}(1+\alpha_1u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right]_{l_1}-\left[k_{20}(1+\alpha_2u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right]_0=\mathrm{P}\frac{i}{q}.$$

Finalmente per le condizioni supposte per le estremità e per l'aria ambiente avremo l'ultima condizione: 5) per $t=0$ $u_1=u_2=0$ per ogni x_1 ed x_2.

Deduzione dello stato stazionario della temperatura. — La temperatura del conduttore considerato tenderà col crescere del tempo ad uno stato stazionario. Le equazioni di esso si deducono dalle precedenti ponendo uguali a zero le derivate della temperatura per rapporto al tempo. La presente Nota si limiterà appunto alla determinazione di questo stato di regime U_1 ed U_2.

Si dovrà evidentemente soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali:

per il primo filo:

$$(\mathrm{III}_1)\qquad \frac{d^2U_1}{dx_1^2}+2j_1\frac{dU_1}{dx_1}-(m_1^2-n_1\delta_1)\,U_1+n_1$$
$$=-\frac{\alpha_1}{2}\frac{d^2(U_1^2)}{dx_1^2}-j_1\,\varepsilon_1\frac{d(U_1^2)}{dx_1}+m_1^2\beta_1\,U_1^2,$$

per il secondo filo:

$$(\mathrm{III}_2)\qquad \frac{d^2U_2}{dx_2}+2j_2\frac{dU_2}{dx_2}-(m_2^2-n_2\delta_2)\,U_2+n_2$$
$$=-\frac{\alpha_2}{2}\frac{d^2(U_2^2)}{dx_2^2}-j_2\,\varepsilon_2\frac{d(U_2^2)}{dx_2}+m_2^2\beta_2\,U_2^2.$$

ove per abbreviare si pose:

$$2j_1=\frac{i\sigma_{10}}{qk_{10}},\quad 2j_2=\frac{i\sigma_{20}}{qk_{20}};$$
$$m_1^2=\frac{ph_{10}}{qk_{10}},\quad m_2^2=\frac{ph_{20}}{qk_{20}};$$
$$n_1=\frac{i^2\omega_{10}}{Jq^2k_{10}},\quad n_2=\frac{i^2\omega_{20}}{Jq^2k_{20}}.$$

Si dovranno inoltre soddisfare alle condizioni:

$$(1_1)\qquad \text{per } x_1=0\quad U_1=0\qquad\qquad \text{per } x_2=l_2\quad U_2=0\qquad (1_2)$$

$$(2)\qquad (U_1)_{l_1}=(U_2)_0$$

$$(3)\qquad P\frac{i}{q}=\left\{k_{10}(1+\alpha_1U_1)\frac{dU_1}{dx_1}\right\}_{l_1}-\left\{k_{20}(1+\alpha_2U_2)\frac{dU_2}{dx_2}\right\}_0.$$

Le equazioni (III_1) e (III_2) si possono risolvere per successive approssimazioni. Avuto riguardo alle grandezze dei coefficienti $\alpha_1, \beta_1, \varepsilon_1$ ed $\alpha_2, \beta_2, \varepsilon_2$, tutti assai piccoli, converrà procedere nella seguente maniera. Si determinerà dapprima la soluzione completa dell' equazione differenziale nota:

$$(5)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+2a\frac{dy}{dx}-by+c=0.$$

In essa si farà: $2a=2j_1$, $b=m_1^2-n_1\,\delta_1$, $c=n_1$ e si avrà così una prima soluzione approssimata della (III_1) contenente due costanti arbitrarie. Analogamente si farà nella soluzione della (5) $2a=2j_2$, $b=m_2^2-n_2\,\delta_2$, $c=n_2$ e si avrà la prima soluzione approssimata della (III_2) contenente pure due costanti arbitrarie. Le quali, unitamente alle precedenti si determineranno facendo uso delle condizioni (1_1), (1_2), (2) e (3).

Siano U_1' e U_2' queste soluzioni. Risolviamo i sistemi di equazioni successive:

$$\frac{d^2U_1''}{dx_1^2} + 2j_1 \frac{dU_1''}{dx_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1)\, U_1''$$
$$= \frac{\alpha_1}{2} \frac{d^2(U_1'^2)}{dx_1^2} - j_1\varepsilon_1 \frac{d(U_1'^2)}{dx_1} + m_1^2 \beta_1 U_1'^2 - n_1 .$$

$$\frac{d^2U_1'''}{dx_1^2} + 2j_1 \frac{d\,U'''}{dx_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1)\, U_1'''$$
$$= \frac{\alpha_1}{2} \frac{d^2(U_1''^2)}{dx_1^2} - j_1\varepsilon_1 \frac{d(U_1''^2)}{dx_1} + m_1^2 \beta_1 U_1''^2 - n_1 .$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^2U_2''}{dx_2} + 2j_2 \frac{dU_2''}{dx_2} - (m_2^2 - n_2\delta_1)\, U_2''$$
$$= \frac{\alpha_2}{2} \frac{d^2(U_2'^2)}{dx_2^2} - j_2\varepsilon_2 \frac{d(U_2'^2)}{dx_2} + m_2^2 \beta_2 U_2'^2 - n_2 .$$

$$\frac{d^2U_2'''}{dx_2^2} + 2j_2 \frac{d\,U_2'''}{dx_2} - (m_2^2 - n_2\delta_2) U_2'''$$
$$= \frac{\alpha_2}{2} \frac{d^2(U_2''^2)}{dx_2^2} - j_2\varepsilon_2 \frac{d(U_2''^2)}{dx_2} + m_2^2 \beta_2 U_2''^2 - n_2 .$$

. . . .

. . . .

avendo cura di determinare sempre le U_1'', U_1''' ecc. e le U_2'', U_2''' ecc. in modo che soddisfacciano alle condizioni richieste. I limiti cui tendono le $U_1^{(n)}$ ed $U_2^{(n)}$ sono le soluzioni delle (III_1) e (III_2) che si dovevano determinare. Ciò si dimostra facilmente stabilendo che le differenze fra due soluzioni successive divengono sempre minori, mentre le equazioni differenziali successive rimangono sempre completamente definite nella regione in cui lo erano le III_1 e III_2.

Per qualsiasi scopo fisico sarà certamente sufficiente l'esattezza cui si giungerà coll'integrazione della prima equazione di ogni sistema; noi ci arresteremo perciò a questo grado di esattezza.

Gli integrali della (5) sono:

$$U'_1 = C_1 + A_1\, e^{\lambda_1 x_1} + B_1\, e^{\mu_1 x_1}\ ; \quad U'_2 = C_2 + A_2\, e^{\lambda_2 x_2} + B_2\, e^{\mu_2 x_2}\ ,$$

ove si pose:

$$C_1 = \frac{n_1}{m_1^2 - n_1\delta_1}\ , \quad C_2 = \frac{n_2}{m_2^2 - n_2\delta_2}$$
$$\lambda_1 = -j_1 + \sqrt{j_1^2 + m_1^2 - n_2\delta_1}\ , \quad \lambda_2 = -j_2 + \sqrt{j_2^2 + m_2^2 - n_2\delta_2}$$
$$\mu_1 = -j_1 - \sqrt{j_1^2 + m_1^2 - n_1\delta_1}\ , \quad \mu_2 = -j_2 - \sqrt{j_2^2 + m_2^2 - n_2\delta_2}\ ;$$

ed in cui le costanti A_1, B_1, A_2, B_2 sono le radici del seguente sistema di equazione di primo grado, che si deducono dalle condizioni (1_1), (1_2), (2) e (3).

$$C_1 + A_1 + B_1 = 0\,,$$

$$C_2 + A_2\, e^{\lambda_2 l_2} + B_2\, e^{\mu_2 l_2} = 0\,,$$

$$C_2 + A_1\, e^{\lambda_1 l_1} + B_1\, e^{\mu_1 l_1} = C_2 + A_2 + B_2\,,$$

$$k_1\,(\lambda_1 A_1\, e^{\lambda_1 l_1} + \mu_1 B_1\, e^{\mu_1 l_1}) - k_2\,(\lambda_2 A_2 + \mu_2 B_2) = P\,\frac{i}{q}\,.$$

Formando colle U_1' ed U_2' la prima equazione di ciascuno dei sistemi precedenti ed integrando si avrano le seguenti soluzioni; che per brevità uniremo in una sola formula intendendo che in essa si apponga a tutte le lettere che la compongono, tranne che alla costante e l'indice 1 per avere la U_1'' e l'indice 2 per avere la U_2'':

$$\begin{aligned}
U'' = {} & \frac{m^2\beta C^2 - n}{\lambda\mu} + M e^{\lambda x} + N e^{\mu x} \\
& - \alpha\Bigg[\frac{2\lambda^2 A^2}{\lambda(2\lambda - \mu)}\, e^{2\lambda x} + \frac{2\mu^2 B^2}{\mu(2\mu - \lambda)}\, e^{2\mu x} + \frac{(\lambda + \mu)^2 AB}{\lambda\mu}\, e^{(\lambda+\mu)x} \\
& \qquad + \frac{\lambda^2 CA[x(\lambda - \mu) - 1]\, e^{\lambda x} + \mu^2\, CB[x(\mu - \lambda) - 1]\, e^{\mu x}}{(\lambda - \mu)^2}\Bigg] \\
& - j\varepsilon\Bigg[\frac{2\lambda A^2}{\lambda(2\lambda - \mu)}\, e^{2\lambda x} + \frac{2\mu B^2}{\mu(2\mu - \lambda)}\, e^{2\mu x} + \frac{2(\gamma + \mu) AB}{\lambda\mu}\, e^{(\lambda+\mu)x} \\
& \qquad + \frac{2\lambda CA[x(\lambda - \mu) - 1]\, e^{\lambda x} + 2\mu CB[x(\mu - \lambda) - 1]\, e^{\mu x}}{(\lambda - \mu)^2}\Bigg] \\
& + m^2\beta\Bigg[\frac{A^2}{\lambda(2\lambda - \mu)}\, e^{2\lambda x} + \frac{B^2}{\mu(2\mu - \lambda)}\, e^{2\mu x} + \frac{2AB}{\lambda\mu}\, e^{(\lambda+\mu)x} \\
& \qquad + \frac{2CA[x(\lambda - \mu) - 1]\, e^{\lambda x} + 2CB[x(\mu - \lambda) - 1]\, e^{\mu x}}{(\lambda - \mu)^2}\Bigg].
\end{aligned}$$

Per determinare le M_1, N_1, M_2 ed N_2 si formerà come precedentemente un sistema di equazioni di primo grado; naturalmente la soluzione di esse sarà molto complicata. Noi tralascieremo questo calcolo bastandoci per ora di aver dimostrato come si possa determinare rigorosamente la temperatura stazionaria di un conduttore bimetallico.

Caso speciale. — Importante per le applicazioni che faremo in seguito è un caso particolare assai più semplice, che ora condidereremo.

Osserviamo che nel caso in cui le variazioni massime della temperatura del conduttore si limitino a pochi gradi, le variazioni dei coefficienti k, h, ω sono d'ordine inferiore agli inevitabili errori che si commettono nella loro misura. Inoltre essendo la derivata della temperatura per rapporto al tempo pure assai piccola, l'effetto Thomson potrà venire trascurato. Le equazioni dello stato stazionario si ridurranno allora al seguente sistema:

$$(6')\quad 0=\frac{d^2U_1}{dx_1^2}-\frac{h_1p}{k_1q}U_1+\frac{i^2\omega_1}{q^2k_1J}\ ;\quad 0=\frac{d^2U_2}{dx_2^2}-\frac{h_2p}{k_2q}U_2+\frac{i^2\omega_2}{q^2k_2J}\quad(6'')$$

colle condizioni:

$$(7')\qquad \text{per } x_1=0\quad U_1=0 \qquad \text{per } x_2=l_2\quad U_2=0 \qquad (7'')$$

$$(8)\qquad (U_1)_{l_1}=(U_2)_0$$

$$(9)\qquad P\frac{i}{q}=k_1\left(\frac{dU_1}{dx_1}\right)_{l_1}-k_2\left(\frac{dU_2}{dx_2}\right)_0 .$$

Si avranno le seguenti soluzioni:

$$U_1=C_1+A_1e^{\lambda_1x_1}+B_1e^{-\lambda_1x_1}\qquad U_2=C_2+A_2e^{\lambda_2x_2}+B_2e^{-\lambda_2x_2}$$

in cui sono:

$$C_1=i^2\frac{\omega_1}{Jqh_1p},\quad C_2=i^2\frac{\omega_2}{J\,qk_2p}$$

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{h_1p}{k_1q}},\quad \lambda_2=\sqrt{\frac{h_2p}{k_2q}},$$

Dalle condizioni 7′, 7″, 8 e 9 si deducono quattro equazioni di primo grado che determinano le costanti A_1, B_1, A_2 e B_2. Si avrà:

$$C_1+A_1+B_1=0$$

$$C_2+Ae^{\lambda_2l_2}+B_2e^{-\lambda_2l_2}=0$$

$$C_1+Ae^{\lambda_1l_1}+B_1e^{-\lambda_1l_1}=C_2+A_2+B_2$$

$$\lambda_1k_1(A_1e^{\lambda_1l_1}-B_1e^{-\lambda_1l_1})-\lambda_2k_2(A_2+B_2)=P\frac{i}{q}.$$

I determinanti con cui si potranno esprimere le costanti A_1, B_1, A_2, B_2 sono assai complicati e difficilmente si potrebbe usare in pratica un' espressione della temperatura in cui intervenissero tali costanti. Osserviamo però che nel punto $x_2=0$ la temperatura sarà espressa dalla semplice formula:

$$U_2=C_2+A_2+B_2,$$

e che invertendo la corrente e facendo la differenza delle due temperature stazionarie, solo i termini che contengono $P\frac{i}{q}$ a fattore rimarranno duplicati, mentre gli altri si elideranno.

Ne segue che la differenza fra le due temperature stazionarie nel punto $x_2=0$ per i due sensi della corrente sarà data dalla formola relativamente semplice:

$$(\varDelta U_2)_0 = 2\,\frac{Pi}{q}\,\frac{(e^{\lambda_1 l_1} - e^{-\lambda_1 l_1})(e^{+\lambda_2 l_2} - e^{-\lambda_2 l_2})}{N}$$

ove

$$N = k_1\lambda_1(e^{\lambda_1 l_1} + e^{-\lambda_1 l_1})(e^{\lambda_2 l_2} - e^{-l_2\lambda_2}) + k_2\lambda_2(e^{\lambda_1 l_1} - e^{-\lambda_1 l_1})(e^{\lambda_2 l_2} + e^{-\lambda_2 l_2}).$$

Già fin d'ora si può vedere che non sarà difficile fondare su questo caso particolare un metodo per la misura dell'effetto Peltier. Mi riservo di ritornare sull'argomento in un prossimo Rendiconto.

Fisica. — *Della densità dei liquidi e dei vapori saturi come funzione della temperatura.* Nota del dott. C. Del Lungo, presentata dal Corrispondente A. Ròiti.

Il prof. G. Guglielmo, in un recente lavoro *Sulla velocità molecolare dei liquidi* (1), giunge alla conclusione, già prevista anche da altri, che la velocità delle molecole di un liquido debba essere eguale a quella delle molecole del suo vapore.

Accettando tale conclusione, almeno come un'ipotesi molto probabile, si può considerare un liquido come un aeriforme di grande densità nel quale le molecole molto vicine fra loro si muovono dentro le sfere d'azione della coesione molecolare. E si può allora ammettere, come altra ipotesi possibile e assai probabile, che le velocità delle molecole di un liquido siano distribuite fra le molecole con la medesima legge che nel vapore, cioè secondo la nota legge del Maxwell.

Partendo da queste due ipotesi, avremmo modo di dedurre teoricamente la relazione che deve essere fra la densità di un liquido, quella del suo vapore saturo e la temperatura. Ricordiamo il meccanismo della vaporizzazione secondo i principî della teoria cinetica dei gas e dei liquidi. Le molecole che dal liquido passano nello spazio sovrastante a formare il vapore, son quelle che arrivano alla superficie libera del liquido con una velocità maggiore delle altre e sufficiente per superare la coesione dell'ultimo strato liquido: le molecole che dal vapore vengono ad urtare la superficie del liquido tornano a far parte di questo; e quando il numero delle prime sia eguale al numero delle seconde, avremo l'equilibrio, ossia il vapore sarà *saturo*. Mentre il liquido si vaporizza, perde le molecole più veloci; e la velocità media delle altre diventando minore, il liquido si raffredda.

(1) Rendic. della R. Acc. dei Lincei (7 novembre 1897).