ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1898.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

L' annullarsi identico del determinante

$$(1)\qquad [A^{(r)}(\varphi_s)] \quad (r, s = 0, 1, \ldots n-1)$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè fra le n funzioni analitiche $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$, che hanno un campo comune di convergenza, passi una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, rispetto alla operazione A, ogni qualvolta tale operazione ha una delle forme [1]:

$$(2)\quad \begin{cases} A(\varphi) = D(\varphi) = \dfrac{d\varphi}{dx}, \quad A(\varphi) = \Delta(\varphi) = \varphi(x+1) - \varphi(x), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A(\varphi) = \theta(\varphi) = \varphi(x+1) \\ A(\varphi) = S(\varphi) = \varphi(\mu x), \quad A(\varphi) = \eta D(\varphi) + \xi\varphi, \; A(\varphi) = \alpha S(\varphi) - \beta\varphi. \end{cases}$$

[1] Per la operazione $\Delta(\varphi)$ vedasi F. Casorati, *Il calcolo delle differenze finite.* Ann. di Mat., serie II, t. X. — La operazione $S(\varphi)$ fu, in questo senso, studiata dal Grévy, *Étude sur les équations fonctionnelles,* Ann. de l' Ec. Normale, III série, t. XI. — Per le ultime due forme della operazione A, vedasi la Nota di S. Pincherle che porta il medesimo titolo della presente, nella serie V, vol. VI, 1897, di questi Rendiconti. Si veda anche la Nota di G. Peano, nel medesimo volume, a pag. 413, col titolo: *Sul determinante Wronskiano.*

Ora è noto che ogni operazione funzionale distributiva definisce una omografia nello spazio generale, e, nello studio di queste omografie [1], non si ha altro modo per riconoscere la esistenza di legami, della forma $\sum_{r=0}^{n-1} \psi_r \varphi_r = 0$, fra n punti $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ dello spazio funzionale, che l' esame del Wronskiano relativo a quei punti. Per tal modo però non si può accertare che la esistenza di tali legami espressi da equazioni lineari omogenee con coefficienti costanti rispetto alla operazione di derivazione ordinaria, mentre le proprietà invariantive dei coefficienti dovrebbero riferirsi alla operazione funzionale che si considera.

Ora, poichè nei casi di operazioni funzionali espressi dalle formole (2), il fatto che i coefficienti ψ_r sono costanti può esprimersi mediante la condizione che il fattore μ_r, determinato dalla relazione

$$A(\psi_r) = \psi_r \mu_r,$$

sia identicamente uguale ad A(1), mi sono proposto di dimostrare che, anche nel caso generale di operazioni distributive qualunque a determinazione unica, fatte le medesime ipotesi sui coefficienti, l' annullarsi del determinante (1) serve ancora a dare il criterio per riconoscere la esistenza di relazioni lineari omogenee formate con tali coefficienti.

Il caso dei coefficienti numericamente costanti viene così naturalmente compreso, di modo che, qualunque sia la operazione A, l' annullarsi del determinante $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1, \dots n-1)$ porta di conseguenza l' annullarsi del Wronskiano $[D^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 - n \dots 1)$, ma non reciprocamente.

Poichè il modo di comportarsi del determinante $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 \dots n-1)$ dipende dalla legge di moltiplicazione della operazione A, non ho potuto lasciare questa legge completamente arbitraria ed ho fatto la ipotesi (abbastanza generale per comprendere tutte le operazioni A usate nella analisi) che la espressione di $A(\varphi\psi)$ sia razionale ed intera nelle φ, ψ, $A(\varphi)$, $A(\psi)$, del resto con coefficienti qualunque e di grado qualunque.

Le funzioni che qui si considerano sono sempre supposte analitiche, ed i risultati ottenuti si intendono veri in ogni campo comune di convergenza.

Fatte queste restrizioni, ho già dimostrato che il teorema di moltiplicazione può essere espresso da una delle due formole:

$$(3) \quad A(\varphi\psi) = \left(\varphi - \frac{1}{\xi} A(\varphi)\right)\left(\psi - \frac{1}{\xi} A(\psi)\right)\Big\{\alpha_0 + \alpha_1(\varphi + \psi) + \\ + \alpha_2\left(A(\varphi) + A(\psi)\right) + \alpha_3 \varphi\psi + \cdots\Big\} + \frac{1}{\xi} A(\varphi) \,.\, A(\psi),$$

[1] Si veda l' importante Memoria di S. Pincherle, *Sur le calcul fonctionnel distributif*, nell' ultimo fascicolo dei Math. Annalen.

$$(4)\quad A(\varphi\psi)=\varphi A(\psi)+\psi A(\varphi)+A(\varphi)A(\psi)\Big\{\alpha_0+\alpha_1(\varphi+\psi)+$$
$$+\alpha_2\big(A(\varphi)+A(\psi)\big)+\alpha_3\varphi\psi+\cdots\Big\},$$

di cui la seconda vale nei casi in cui si ha identicamente $\xi=A(1)=0$, e la prima vale in ogni altro caso.

Fondandosi su queste formule si può, in modo puramente algebrico, trovare la proprietà enunciata del determinante $[A^r(\varphi_s)]$, come ora spero di dimostrare.

Sia Γ il campo di convergenza comune alle funzioni φ ed $A(\varphi)$, e si chiami Γ' il campo che risulta da Γ toltivi i punti radici della $\varphi(x)$. La funzione μ, definita dalla relazione

$$A(\varphi)=\varphi\mu,$$

e che ha con le φ ed $A(\varphi)$ un campo comune di convergenza contenuto in Γ', sarà in quel che segue, chiamata *moltiplicatore della funzione φ rispetto alla operazione* A.

Quelle funzioni che ammettono il moltiplicatore $\xi=A(1)$, per analogia a quello che si fa nell' ordinario calcolo differenziale, saranno chiamate *costanti per la operazione* A.

Teorema I. *La condizione necessaria e sufficiente perchè sia soddisfatta identicamente la relazione*

$$(5)\qquad A(\varphi\psi)=\varphi A(\psi)$$

per qualunque funzione ψ, è che si abbia $A(\varphi)=\varphi\xi$; *cioè che la φ sia costante per la operazione* A.

La condizione è sufficiente:

Sia prima ξ non identicamente nulla. Per ogni funzione φ, costante per la operazione A, si hanno le relazioni:

$$\varphi-\frac{1}{\xi}A(\varphi)=0\,,\quad \frac{1}{\xi}A(\varphi)=\varphi$$

e la formola di moltiplicazione (3) si riduce semplicemente ad

$$A(\varphi\psi)=\varphi A(\psi)$$

che dimostra l' enunciato.

Sia poi $\xi=0$. Avremo identicamente:

$$A(\varphi)=\varphi\xi=0\,,$$

e la formola (4) di moltiplicazione, dà, anche per questo caso:

$$A(\varphi\psi)=\varphi\,.\,A(\psi)\,.$$

La condizione è necessaria:

Ed invero, se per ogni ψ deve aversi $A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi)$; per $\psi = 1$ si avrà $A(\varphi) = \varphi A(1) = \varphi\xi$; cioè la φ sarà una costante per la operazione A.

La dimostrazione qui fatta rende manifesta la analogia fra quelle funzioni che abbiamo chiamato costanti rispetto alla operazione A, e le costanti numeriche in rapporto alla derivazione ordinaria, di più ci prova che esse non differiscono da quelle funzioni che il Pincherle chiama *periodi della operazione* A (¹).

Sotto questo punto di vista quindi le due denominazioni di costante, o di periodo, per rapporto ad una data operazione funzionale sono da considerarsi come equivalenti.

Teorema II. *Se la funzione φ è costante per la operazione* A, *anche la sua inversa è costante per quella stessa operazione.*

Si ponga $\psi = \dfrac{1}{\varphi}$. Per l'ipotesi posta avremo

$$\begin{aligned} A(\varphi\psi) &= \varphi A(\psi)\,, \text{ cioè} \\ A(1) &= \varphi A(\psi)\,, \text{ ed infine} \\ A(\psi) &= \psi \,.\, A(1) = \psi\xi\,, \end{aligned}$$

che prova l'asserto.

Teorema III. *Il prodotto ed il quoziente di una funzione analitica ψ per una costante rispetto alla operazione funzionale* A, *sono funzioni che hanno, rispetto ad* A, *lo stesso moltiplicatore della ψ.*

Ed infatti se $A(\psi) = \psi\mu$, ed $A(\varphi) = \varphi\xi$, si ha, pei teoremi (1) e (2):

$$(6) \qquad \begin{cases} A(\varphi\psi) = \varphi A(\psi) = \varphi\,\psi\,.\,\mu \\ A\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right) = \dfrac{1}{\varphi} A(\psi) = \dfrac{\psi}{\varphi}\,.\,\mu\,. \end{cases}$$

Reciprocamente. *Il quoziente di due funzioni analitiche che hanno un campo comune di convergenza ed ammettono lo stesso moltiplicatore rispetto ad una operazione funzionale* A, *è una costante per la operazione* A.

Ed invero, sia

$$(7) \qquad A(\varphi) = \varphi\mu\,, \quad A(\psi) = \psi\mu$$

e si ponga $\psi = \varphi\omega$.

Dalla seconda delle (7) si ricava:

$$\begin{aligned} A(\varphi\omega) &= \varphi\,\omega\,\mu\,; \text{ cioè} \\ A(\varphi\omega) &= \omega\,A(\varphi)\,. \end{aligned}$$

La funzione ω è dunque costante per la operazione A.

(¹) *Sulla generalizzazione della proprietà del determinante Wronskiano*, loc. cit., §. 5.

Da questo teorema, e per essere la operazione A distributiva, si ha:

Teorema IV. *Se le funzioni analitiche* $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$, *convergono in un campo comune* Γ, *ed ammettono tutte lo stesso moltiplicatore, qualunque funzione lineare omogenea a coefficienti costanti*

$$\psi = \omega_0 \varphi_0 + \omega_1 \varphi_1 + \cdots + \omega_{n-1} \varphi_{n-1},$$

ammette lo stesso moltiplicatore, rispetto alla operazione funzionale A.

In particolare se le $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ fossero tutte costanti, lo sarebbe anche la ψ.

Se di più poniamo $\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_0$, $\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_0, \dots \varphi_{n-1} = \lambda_{n-1} \varphi_0$, i quozienti $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$ saranno tutti costanti per la operazione A di modo che si ha il teorema:

Teorema V. *Se fra n funzioni analitiche* $\psi_0, \psi_1, \dots \psi_{n-1}$, *convergenti in un campo comune* Γ, *esiste una relazione lineare omogenea con coefficienti che convergono in quello stesso campo ed ammettono un moltiplicatore comune rispetto alla operazione* A, *per tutti i punti del campo che si ottiene da* Γ *togliendovi le radici di quei coefficienti, ha luogo una relazione lineare omogenea fra le* $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}$, *a coefficienti costanti per quella operazione funzionale.*

Si potrebbe anzi aggiungere che di questi coefficienti uno può sempre farsi eguale alla unità.

Teorema VI. *La condizione necessaria e sufficiente perchè fra n funzioni analitiche* $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$, *che hanno un campo comune di convergenza, passi una relazione lineare omogenea* $\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s \varphi_s = 0$, *a coefficienti costanti rispetto ad una operazione funzionale distributiva ed a determinazione unica* A, *è che sia identicamente nullo il determinante* $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 \dots n-1)$...

La condizione è necessaria:

Ed infatti dalla relazione $\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s \varphi_s = 0$, per successiva applicazione della operazione A, si hanno le altre: $\sum_{s=0}^{n-1} \lambda_s A^{(r)}(\varphi_s) = 0$ $(r = 1, 2 \dots n-1)$, e per la coesistenza di queste si richiede che sia nullo identicamente il determinante $[A^{(r)}(\varphi_s)]$ $(r, s = 0, 1 \dots n-1)$.

La condizione è sufficiente:

Ciò è anzitutto manifesto per sistemi formati da due sole funzioni perchè, dall'esser nullo identicamente il determinante $\begin{vmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 \\ A(\varphi_0) & A(\varphi_1) \end{vmatrix}$, si ricava $\frac{A(\varphi_0)}{\varphi_0} = \frac{A(\varphi_1)}{\varphi_1} = \mu$; cioè $A(\varphi_0) = \varphi_0 \mu$, $A(\varphi_1) = \varphi_1 \mu$: ed allora, pel Teorema III, il quoziente $\frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ è una funzione λ_1 costante per la operazione A, e si ha la relazione identica $\varphi_0 - \lambda_1 \varphi_1 = 0$.

Supponiamo ora il Teorema dimostrato per sistemi di $n-1$ funzioni e dimostriamolo per sistemi di n funzioni. Si vede facilmente che:

$$[A^{(r)}(\varphi_s)]\,(r\,,s = 1 \dots n-1) = \frac{1}{A(\varphi_0)\,A^{(r)}(\varphi_0) \dots A^{(n-2)}(\varphi_0)}$$
$$[A^{(r)}(\varphi_s)\,A^{(r+1)}(\varphi_0) - A^{(r+1)}(\varphi_s)\,A^{(r)}(\varphi_0)]\;(r\,,s = 1\,,2\,,\dots n-1)$$

Il determinante al 2° membro è della forma $[A^{(r)}(\Omega_s)](r,s=1,2,\dots n-1)$ ed è relativo alle $n-1$ funzioni $\Omega_s = \varphi_s A(\varphi_0) - \varphi_0 A(\varphi_s)\,(s = 1,2 \dots n-1)$. Questo determinante inoltre è identicamente nullo, perchè lo è il primo membro, ed esiste un campo comune di convergenza alle funzioni analitiche $A^{(r)}(\varphi_0)$.

Siccome però il teorema si suppone dimostrato per sistemi di $n-1$ funzioni, così fra le Ω_s dovrà passare una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti e si avrà:

$$\omega_1\big(\varphi_0 A(\varphi_1) - \varphi_1 A(\varphi_0)\big) + \omega_2\big(\varphi_0 A(\varphi_2) - \varphi_2 A(\varphi_0)\big) + \dots +$$
$$+ \omega_{n-1}\big(\varphi_0 A(\varphi_{n-1}) - \varphi_{n-1} A(\varphi_0)\big) = 0\,.$$

Una tale relazione può anche scriversi sotto la forma

$$\begin{vmatrix} \varphi_0 & \sum\limits_{s=1}^{n-1} \omega_s \varphi_s \\ A(\varphi_0) & A\left(\sum\limits_{s=1}^{n-1} \omega_s \varphi_s\right) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Abbiamo visto però che l'annullarsi identico di questo determinante porta ad una relazione della forma:

$$\varphi_0 - c_1 \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s \varphi_s = 0$$

con c_1 costante per la operazione A; cioè, finalmente, alla relazione:

$$\varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_{n-1} \varphi_{n-1} = 0\,,$$

con coefficienti costanti per la operazione A, come appunto si voleva provare.