ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

parecchie giornate senza macchie. Anche nella frequenza dei gruppi di macchie e loro estensione si verificò un minimo ragguardevole nel mese di novembre, così che per le macchie le medie di questo trimestre risultano assai inferiori a quelle del trimestre precedente. Nelle facole invece vi fu un aumento di estensione. Le osservazioni furono eseguite da me in 50 giornate e in 20 dal sig. Vezzani.

Per le protuberanze si ottennero i dati seguenti:

1897

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Medio numero delle protuberanze per giorno	Media altezza per giorno	Estensione media	Media delle massime altezze	Massima altezza osservata
Ottobre. . .	20	4,90	37″,7	1°,3	49″,4	100″
Novembre .	18	4,95	39,2	1,7	58,6	169
Dicembre. .	17	3,00	33,0	1,3	36,6	60
4° trimestre	55	4,33	36,8	1,5	48,5	169

In questo trimestre il fenomeno delle protuberanze solari presentò un leggero aumento, in modo inverso cioè di quanto avvenne per le macchie: però può dirsi che perdurò lo stato di stazionarietà accennato per questo fenomeno nella precedente Nota. Le osservazioni furono fatte da me in 42 giornate, e in 13 dall' assistente sig. prof. Palazzo.

Matematica. — *Ancora sull' estensione dei teoremi di Eulero e Meusnier agli iperspazii.* Nota di L. Berzolari, presentata dal Socio Beltrami.

In una Nota inserita nel fascicolo 10, 2° sem. 1897, dei Rendiconti di codesta illustre Accademia, ho mostrato come i teoremi di Eulero e Meusnier, relativi alla curvatura delle linee tracciate sopra una superficie dello spazio ordinario, si possono estendere ad una varietà di $n-1$ dimensioni, contenuta in uno spazio S_n di n dimensioni, considerando le sezioni fatte nella varietà con gli *iperpiani* passanti per un punto fisso di essa. Ora mi sono accorto che con gli stessi metodi di quella Nota si possono avere risultati notevolmente più generali, esaminando le sezioni prodotte nella data varietà da spazii lineari *aventi quante si vogliano dimensioni* e passanti pel punto fissato. Nei teoremi che così si ottengono son quindi compresi quelli della Nota precedente,

nonchè quelli notissimi, che furono stabiliti per la prima volta dal Kronecker [1].

Circa l'estensione del teorema di Meusnier, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli dei n. 2 e 3 della Nota citata, si conclude senz'altro:

Data in S_n *una varietà ad* $n-1$ *dimensioni e fissato su essa un punto* O, *si considerino le sezioni (ad* $r-1$ *dimensioni) fatte nella varietà con due spazii lineari di* r *dimensioni* ($r = 2, 3, \dots, n-1$), *passanti per* O, *l'uno obliquo e l'altro normale alla varietà, ma aventi la stessa traccia sull'iperpiano tangente in* O *alla varietà medesima: nel punto* O *la curvatura della sezione obliqua sarà uguale a quella della sezione normale, divisa per la* $(r-1)^{\text{ma}}$ *potenza del coseno dell'angolo compreso fra i due spazii secanti.*

Per ciò che concerne l'estensione del teorema di Eulero, poniamo — come nel n. 4 della Nota citata — l'origine delle coordinate nel punto considerato O, prendendo per iperpiano $x_n = 0$ quello che è ivi tangente alla varietà e scegliendo gli altri iperpiani coordinati in modo che l'equazione dell'indicatrice contenga soltanto i quadrati delle coordinate: l'equazione della varietà assumerà così la forma:

$$2x_n = A_1 x_1^2 + \cdots + A_{n-1} x_{n-1}^2 + P . \tag{1}$$

Ora si conduca per la normale in O, cioè per l'asse Ox_n, uno spazio lineare qualunque S_r ad r dimensioni, e si cambino gl'iperpiani coordinati $x_1 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$ in altri $y_1 = 0, \dots, y_{n-1} = 0$ colle formole

$$x_i = \gamma_i^{(1)} y_1 + \gamma_i^{(2)} y_2 + \cdots + \gamma_i^{(n-1)} y_{n-1} \tag{2}$$
$$(i = 1, 2, \dots, n-1),$$

in guisa che lo spazio S_r venga rappresentato dalle equazioni

$$y_r = y_{r+1} = \cdots = y_{n-1} = 0 .$$

Sostituendo le espressioni (2) in (1), e ponendo

$$B_{ij} = A_1 \gamma_1^{(i)} \gamma_1^{(j)} + \cdots + A_{n-1} \gamma_{n-1}^{(i)} \gamma_{n-1}^{(j)} \tag{3}$$
$$(i, j = 1, 2, \dots, r-1),$$

la curvatura che la sezione della varietà con S_r ha nel punto O, sarà data dal valore del determinante $|B_{ij}|$. Ponendo in questo, in luogo delle B, le

[1] Kronecker, *Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln* (Monatsberichte der K. P. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1869, pag. 688). Cfr. pure Killing, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885, § 11).

espressioni (3), ed osservando che nel determinante ortogonale — uguale all'unità positiva — formato coi coefficienti γ delle (2) ogni minore è uguale al proprio complemento algebrico, si trova:

$$(4) \qquad |B_{ij}| = \sum A_{h_1} A_{h_2} \dots A_{h_{r-1}} \begin{vmatrix} \gamma_{h_r}^{(r)} & \gamma_{h_r}^{(r+1)} & \dots & \gamma_{h_r}^{(n-1)} \\ \gamma_{h_{r+1}}^{(r)} & \gamma_{h_{r+1}}^{(r+1)} & \dots & \gamma_{h_{r+1}}^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{h_{n-1}}^{(r)} & \gamma_{h_{n-1}}^{(r+1)} & \dots & \gamma_{h_{n-1}}^{(n-1)} \end{vmatrix}^2 ,$$

dove $h_1 h_2 \dots h_{r-1}$ ed $h_r h_{r+1} \dots h_{n-1}$ sono due qualunque combinazioni fra loro complementari, formate con $r-1$ ed $n-r$ numeri della serie $1, 2, \dots, n-1$, e la somma comprende tutti gli $\binom{n-1}{r-1}$ termini che si ricavano da quello scritto considerando tutte le dette combinazioni.

Le $A_{h_1}, A_{h_2}, \dots, A_{h_{r-1}}$ sono le curvature principali della varietà, corrispondenti agli assi $x_{h_1}, x_{h_2}, \dots, x_{h_{r-1}}$ dell'indicatrice. Il quadrato che comparisce nella (4) come ultimo fattore ha pure un significato geometrico assai semplice, poichè da una formola dovuta al sig. Jordan [1] si deduce che esso equivale al prodotto dei quadrati dei coseni degli $n-r$ angoli formati dai due spazii lineari ad $n-r$ dimensioni determinati dagli assi $x_{h_r}, x_{h_{r+1}}, \dots, x_{h_{n-1}}$ e dagli assi $y_r, y_{r+1}, \dots y_{n-1}$. Il primo di tali spazii si può opportunamente chiamare uno *spazio principale* dell'indicatrice, il secondo è lo spazio normale in O al dato S_r. Introducendo gli spazii ad r dimensioni normali in O ai precedenti, ed applicando il teorema 2° dato dal sig. Jordan n. 48 del l. c., risulta infine:

La curvatura in O della sezione fatta nella data varietà con uno spazio lineare normale ad r dimensioni è uguale alla somma degli $\binom{n-1}{r-1}$ *prodotti che si ottengono moltiplicando fra loro in tutti i modi possibili* $r-1$ *delle curvature principali ed i quadrati dei coseni degli angoli formati dallo spazio fissato e dallo spazio lineare normale ad r dimensioni, condotto per lo spazio principale (ad* $r-1$ *dimensioni) dell'indicatrice, al quale corrispondono le* $r-1$ *curvature principali considerate.*

[1] Jordan, *Essai sur la géométrie à n dimensions* (Bulletin de la Société Math. de France, t. 3, 1875, n. 50).