ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Matematica. — *Sugli spazii a curvatura costante.* Nota del dott. REMIGIO BANAL [1], presentata dal Socio BELTRAMI.

II.

La deformabilità dello spazio di Ricci.

§ 4. Lo studio della deformabilità dello spazio di Ricci deve attaccarsi ad alcune considerazioni che formano l' oggetto del 1° Capitolo del mio lavoro: *Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali* (Annali di Matematica, 1896). In questo capitolo si dimostra come le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un elemento lineare a tre variabili indipendenti

$$\sum\nolimits_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

appartenga ad una varietà a tre dimensioni a curvatura totale nulla, consistono in ciò:

1° che i simboli di Riemann ad esso relativi (che indicheremo ora con $\alpha_1^{(rs)}$) siano decomponibili secondo le equazioni:

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \alpha_1^{(rs)} = \mathrm{G}\alpha^{(r)}\alpha^{(s)} \qquad (\mathrm{G} = \sum\nolimits_{rs} a_{rs}\, \alpha_1^{(rs)})$$

2° che esista almeno un sistema di funzioni b_{rs} della forma

$$\text{(C)} \qquad b_{rs} = e\beta_r\beta_s + g\gamma_r\gamma_s$$

le quali soddisfacciano ad un tempo alle equazioni algebriche:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \sum_r \alpha^{(r)}\beta_r = \sum_r \alpha^{(r)}\gamma_r = \sum_r \beta^{(r)}\gamma_r = 0 \\ \sum_r \alpha^{(r)}\alpha_r = \sum_r \beta^{(r)}\beta_r = \sum_r \gamma^{(r)}\gamma_r = 1 \end{cases}$$

$$\text{(E)} \qquad e\,.\,g = \mathrm{G}$$

e alle equazioni fondamentali (B).

Ed è opportuno ricordare come alle (D) equivalgano le

$$\text{(D}'\text{)} \qquad a_{rs} = \alpha_r\,\alpha_s + \beta_r\beta_s + \gamma_r\gamma_s$$

e come le funzioni e, g rappresentino, cambiato il segno, le due curvature principali non nulle della varietà considerata.

Ora si riprenda l' elemento lineare dello spazio di Ricci sotto la forma

$$\text{(3)} \qquad ds^2 = d\alpha^2 + \frac{1}{c^2}\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2)\,.$$

[1] V. fascicolo precedente.

Per miglior ordine di trattazione verifichiamo, quantunque possa sembrar superfluo, come per quest' elemento lineare le condizioni precedenti siano soddisfatte. Dal calcolo diretto dei simboli di Christoffel e di Riemann, fatte corrispondere le variabili α, θ, χ rispettivamente alle variabili x_1, x_2, x_3 delle formole generali (5), (6) [1] risulta che i primi sono tutti nulli, tranne

$$a_{32,3} = -a_{33,2} = \frac{1}{c^2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta ,$$

e conseguentemente sono nulli anche i secondi, salvo

$$\alpha_1^{(11)} = c^2 .$$

Si riconosce allora subito che anzitutto sono soddisfatte le condizioni (A′), e si riscontra nello stesso tempo l'identità delle funzioni $\alpha^{(r)}$ (e quindi delle α_r [2]) con le derivate prime della variabile α.

§ 5. Quanto alla seconda parte, un sistema di funzioni b_{rs} della forma richiesta si deduce, unico e determinato, dalle (D′) ed (E) stesse, quando si abbia

$$e = g$$

ed è:

$$b_{rs} = c(a_{rs} - \alpha_r\alpha_s) . \tag{8}$$

Un tale sistema soddisfa alle equazioni fondamentali

$$b_{rst} = b_{rts} ;$$

infatti coi metodi del calcolo differenziale assoluto da esso abbiamo

$$b_{rst} = c(a_{rst} - \alpha_r\alpha_{st} - \alpha_s\alpha_{rt}) ,$$

e queste b_{rst} sono nulle, poichè sono nulle tanto le a_{rst}, come è noto, come le α_{rs} date dalle formole

$$\alpha_{rs} = \frac{d^2\alpha}{dx_r\, dx_s} - \sum_p \alpha^{(p)} a_{rs,p} ,$$

[1] Si ha con ciò:

$$a_{11} = 1 ; \quad a_{22} = \frac{1}{c^2} ; \quad a_{33} = \frac{1}{c^2} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$|a| = \frac{1}{c^4} \operatorname{sen}^2\theta$$

$$a^{(11)} = 1 ; \quad a^{(22)} = c^2 ; \quad a^{(33)} = \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$a_{rs} = a^{(rs)} = 0 \quad \text{per } r \gtrless s .$$

[2] Si ha infatti $\alpha^{(1)} = 1$; $\alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = 0$, e per le

$$\alpha_r = \sum_s a_{rs}\, \alpha^{(s)}$$

si ha parimenti $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Confronta per questi e per gli altri sviluppi di calcolo differenziale assoluto, che seguiranno, il *Résumé de quelques travaux*, ecc. già citato.

dalle quali risulta

$$\alpha_{rs} = - a_{rs,1} = 0 .$$

Ora a tale sistema di funzioni corrisponde una speciale configurazione (unica) dello spazio di Ricci, nella quale si conservano eguali e costanti in tutti i punti le due curvature principali diverse da zero. Essa costituisce una superficie molto notevole, della quale non si saprebbe indicare l'analoga nella geometria a due dimensioni; superficie intermedia in certo modo fra la sfera (che ha in ogni punto le tre curvature principali eguali e costanti) e il cilindro a tre dimensioni (che ha in ogni punto due curvature nulle e costante la terza), ma essenzialmente diversa dall'una e dall'altro. come è facile dedurre dalle considerazioni del § 2. Di essa è fatto qualche cenno nel mio lavoro più volte citato.

§ 6. Il problema di cui ci occupiamo si riduce analiticamente a questo: riconoscere se, oltre a quello definito dalle (8) esistano altri sistemi di funzioni b_{rs} della forma (C) che soddisfacciano alle equazioni (B), (D), (E), e in caso affermativo procedere alla loro determinazione.

Cominciamo a tal uopo dal notare come, avendosi dalle due prime delle equazioni algebriche (D), per una osservazione fatta nel paragrafo precedente:

(9) $$\beta_1 = \gamma_1 = 0$$

le (C) forniscano

(10) $$b_{11} = b_{12} = b_{13} = 0$$

cosicchè risultano fin d'ora determinate tre delle sei funzioni b_{rs}. Per le (9), quelle fra le rimanenti equazioni (D), che non sono identità, si riducono alle seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta^{(2)} \gamma_2 + \beta^{(3)} \gamma_3 = 0 \\ \beta^{(2)} \beta_2 + \beta^{(3)} \beta_3 = 1 \\ \gamma^{(2)} \gamma_2 + \gamma^{(3)} \gamma_3 = 1 \end{array}\right.$$

le quali, con le sostituzioni indicate dalle

$$\beta^{(r)} = \sum_r a^{(rs)} \beta_s , \quad \gamma^{(r)} = \sum_s a^{(rs)} \gamma_s$$

posti per le $a^{(rs)}$ gli elementi del sistema reciproco a quello dei coefficienti dell'elemento lineare (3), prendono la forma:

(D₁) $$\left\{\begin{array}{l} \beta_2 \gamma_2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \beta_3 \gamma_3 = 0 \\ \beta_2^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \beta_3^2 = \dfrac{1}{c^2} \operatorname{sen}^2\theta \\ \gamma_2^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_3^2 = \dfrac{1}{c^2} \operatorname{sen}^2\theta \end{array}\right.$$

e queste equivalgono alle

$$(\mathrm{D}'_1)\qquad \begin{cases} \beta_2\,\beta_3+\gamma_2\,\gamma_3=0 \\ \beta_2^2+\gamma_2^2=\dfrac{1}{c^2} \\ \beta_3^2+\gamma_3^2=\dfrac{1}{c^2}\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{cases}$$

che si deducono direttamente dalle (D').

Un' altra delle funzioni b_{rs} può determinarsi nel modo seguente: dai prodotti membro a membro delle due ultime equazioni (D'$_1$) togliamo rispettivamente i quadrati dei due membri della prima. Abbiamo:

$$\beta_2^2\,\gamma_3^2+\beta_3^2\,\gamma_2^2-2\beta_2\,\beta_3\,\gamma_2\,\gamma_3=\frac{1}{c^4}\,\mathrm{sen}^2\theta\,.$$

Se al primo membro di questa equazione, moltiplicata per $e\,.\,g$ aggiungiamo e togliamo i termini

$$e^2\,\beta_2^2\,\beta_3^2\;,\;\;g^2\,\gamma_2^2\,\gamma_3^2$$

la potremo scrivere come segue:

$$(e\,\beta_2^2+g\,\gamma_2^2)\,(e\,\beta_3^2+g\,\gamma_3^2)-(e\,\beta_2\,\beta_3+g\,\gamma_2\,\gamma_3)^2=c^2\cdot\frac{1}{c^4}\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

o per le (C)

$$(11)\qquad \frac{b_{22}\,b_{33}-b_{23}^2}{|a|}=c^2\,.$$

Le funzioni incognite del nostro problema si riducono dunque a due distinte, per le quali si possono assumere tanto due delle b_{22}, b_{33}, b_{23} quanto p. es. e, β_2 essendo possibile determinare algebricamente, per mezzo delle (C), (E), (D'$_1$), ciascuna delle due prime funzioni per mezzo delle altre due, e reciprocamente, salvo qualche incertezza di segno, che non porta nessuna alterazione nella forma delle equazioni differenziali (B) da cui dipendono le funzioni incognite stesse.

Trasformiamo ora tali equazioni differenziali riferendoci all'elemento lineare (3) e tenendo conto delle (10). Esse sono in numero di nove, di cui, nel caso generale, otto sole sono distinte, e cioè

$$b_{112}=b_{121}\,;\;\; b_{113}=b_{131}\,;\;\; b_{221}=b_{212}\,;\;\; b_{223}=b_{232}\,;\;\; b_{331}=b_{313}\,;\;\; b_{332}=b_{323}$$
$$b_{123}=b_{132}\,;\;\; b_{231}=b_{213}.$$

Per calcolare le diverse funzioni b_{rst} partiamoci dalle (7) e teniamo conto dei valori particolari già riportati, che assumono nel nostro caso le $a^{(rs)}$

e le $a_{rs,t}$. Avremo:

$$b_{rst} = \frac{db_{rs}}{dx_t} - c^2 (a_{rt,2}\, b_{s2} + a_{st,2}\, b_{r2}) - \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2\theta} (a_{rt,3}\, b_{s3} + a_{st,3}\, b_{r3})$$

$$(x_t = \alpha\,, \theta\,, \chi \text{ per } t = 1\,, 2\,, 3)\,.$$

Da questa formola deduciamo subito che, fra le b_{rst}, che a noi importa calcolare, sono nulle le seguenti:

$$b_{112}\,,\; b_{113}\,,\; b_{121}\,,\; b_{131}\,,\; b_{212}\,,\; b_{313}\,,\; b_{123}\,,\; b_{132}\,.$$

Le altre assumono la forma:

$$b_{221} = \frac{db_{22}}{d\alpha}\,,\; b_{331} = \frac{db_{33}}{d\alpha}\,,\; b_{231} = \frac{db_{23}}{d\alpha}\,,$$

$$b_{223} = \frac{db_{22}}{d\chi} - 2b_{23} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,,$$

$$b_{332} = \frac{db_{33}}{d\theta} - 2b_{33} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,,$$

$$b_{232} = \frac{db_{23}}{d\theta} - b_{23} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,,$$

$$b_{323} = \frac{db_{23}}{d\chi} + b_{22} \operatorname{sen}\theta \cos\theta - b_{33} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Perciò quelle fra le equazioni differenziali (B), che non risultano identità, si trasformano come segue:

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \frac{db_{22}}{d\alpha} = \frac{db_{33}}{d\alpha} = \frac{db_{23}}{d\alpha} = 0$$

$$\text{(B}''\text{)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{db_{22}}{d\chi} - \frac{db_{23}}{d\theta} = b_{23} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ &\frac{db_{33}}{d\theta} - \frac{db_{23}}{d\chi} = b_{22} \operatorname{sen}\theta \cos\theta + b_{33} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \end{aligned} \right.$$

Possiamo adunque concludere che:

Quattro dei sei coefficienti della seconda forma fondamentale relativa allo spazio di Ricci, sono determinati dalle equazioni algebriche (10), (11). *Gli altri due devono soddisfare ad un sistema di equazioni differenziali, che si ottiene eliminando per mezzo della* (11) *uno dei tre coefficienti* $b_{22}\,, b_{33}\,, b_{23}$ *nelle* (B′) *e* (B″).

§ 7. Rimarrebbe da procedere a tale eliminazione, e da completare eventualmente il sistema d'equazioni differenziali risultante, con quelle che esprimono le condizioni di integrabilità delle funzioni incognite rimaste; ma possiamo giungere a conclusioni definitive per il nostro problema senza altri calcoli, osservando anzitutto che quelli fra i coefficienti b_{rs} che rimangono da calcolare, sono, per le (B′) funzioni soltanto delle variabili θ e χ; si constata inoltre facilmente che le equazioni (11), (B″) cui devono soddisfare, non sono altro che rispettivamente le equazioni di Gauss e di Codazzi relative all'elemento lineare

$$\frac{1}{c^2}(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2)$$

cioè alla sfera a due dimensioni di raggio $\frac{1}{c}$ dello spazio euclideo.

Abbiamo dunque dimostrato che:

Lo spazio di Ricci è deformabile. Il problema di determinare tutte le varietà a tre dimensioni applicabili su di esso, equivale analiticamente a quello della deformazione della sfera, in quanto che ogni seconda forma fondamentale di una sfera di dato raggio è altresì seconda forma fondamentale dello spazio di Ricci di egual raggio e viceversa.

Geometricamente, per ogni superficie a curvatura costante positiva dello spazio euclideo è possibile costruire una varietà a tre dimensioni applicabile sullo spazio di Ricci, e reciprocamente nota una di tali varietà se ne può dedurre una superficie a due dimensioni applicabile sulla sfera.

§ 8. Possiamo estendere il risultato ora ottenuto ad una classe più larga di superficie a tre dimensioni studiata nella mia Memoria più volte citata. Sono quelle a cui appartengono le seguenti forme caratteristiche dell'elemento lineare:

$$ds^2 = d\alpha^2 + k_1^2\,\alpha^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\chi^2) \tag{12}$$

$$ds^2 = k_1^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1-k_1}}$$

dove k_1 è una costante in valore assoluto sempre minore di 1. Tali varietà sono a curvatura totale nulla e a curvatura di Gauss positiva data da

$$G = \frac{k^2}{\alpha^2}$$

ovvero

$$G = \frac{k^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{k_1}},$$

le costanti k, k_1 essendo legate dalla relazione

$$k_1^2 = \frac{1}{1 + k^2};$$

esse ammettono come superficie limite per $k_1 = \pm 1$ lo spazio euclideo.

Riferendoci alla forma (12) dell' elemento lineare ed effettuando il calcolo dei simboli di Christoffel e di Riemann, si trova che fra i primi sono diversi da zero soltanto i seguenti:

$$a_{12,2} = -a_{22,1} = k_1^2\,\alpha$$
$$a_{13,3} = -a_{33,1} = k_1^2\,\alpha\,\mathrm{sen}^2\theta$$
$$a_{23,3} = -a_{33,2} = k_1^2\,\alpha^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta;$$

così pure i secondi sono tutti nulli, tranne

$$\alpha_1^{(11)} = \frac{k^2}{\alpha^2}.$$

Anche per queste superficie sono adunque soddisfatte le condizioni (A′) del § 4, ed è constatata l' identità delle funzioni $\alpha^{(r)}$ (e quindi anche delle α_r) con le derivate della variabile α.

Considerazioni affatto analoghe a quelle del § 5 dimostrano inoltre che un sistema di coefficienti per la seconda forma fondamentale delle varietà considerate è il seguente:

$$b_{rs} = \frac{k}{\alpha}\,(a_{rs} - \alpha_r\,\alpha_s)$$

e a tale sistema corrisponde per ognuna di esse una speciale configurazione [1], nella quale le due curvature diverse da zero sono eguali ed hanno per valore comune

$$-\frac{k}{\alpha}.$$

Volendo determinare tutti i sistemi di coefficienti della forma (C) che soddisfanno alle (D) o (D′), alla (E) e alle (B), posti dappertutto per le a_{rs} i coefficienti dell' elemento lineare (12), osserveremo anche qui come, avendosi dalle (D′)

$$\beta_1 = \gamma_1 = 0$$

risulti:

(13) $$b_{11} = b_{12} = b_{13} = 0\,,$$

e le (D″) si riducano alle seguenti:

$$\beta_2\,\beta_3 + \gamma_2\,\gamma_3 = 0$$
$$\beta_2^2 + \gamma_2^2 = k_1^2\,\alpha^2$$
$$\beta_3^2 + \gamma_3^2 = k_1^2\,\alpha^2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

dalle quali, come nel § 6, possiamo trarre

(14) $$\frac{b_{22}\,b_{33} - b_{23}^2}{|a|} = \frac{k^2}{\alpha^2}.$$

[1] Per maggiori dettagli in proposito vedasi il cap. 2° della mia Memoria già citata.

Per calcolare quelle tra le funzioni b_{rst} che compaiono nelle equazioni fondamentali (B), ricorreremo alla formola:

$$b_{rst} = \frac{db_{rs}}{dx_t} - \frac{1}{k_1^2\,\alpha^2}(a_{rt,2}\,b_{s2} + a_{st,2}\,b_{r2}) - \frac{1}{k_1^2\,\alpha^2 \operatorname{sen}^2\theta}(a_{rt,3}\,b_{s3} + a_{st,3}\,b_{r3})$$

$$(x_t = \alpha\,,\,\theta\,,\,\chi \text{ per } t = 1\,,2\,,3)$$

e troveremo:

$$b_{112} = b_{113} = b_{121} = b_{131} = 0$$

$$b_{212} = -\frac{b_{22}}{\alpha}\ ;\ b_{313} = -\frac{b_{33}}{\alpha}\ ;\ b_{123} = b_{132} = -\frac{b_{23}}{\alpha}$$

$$b_{221} = \frac{db_{22}}{d\alpha} - \frac{2b_{22}}{\alpha}\ ;\ b_{331} = \frac{db_{33}}{d\alpha} - \frac{2b_{33}}{\alpha}\ ;\ b_{231} = \frac{db_{23}}{d\alpha} - \frac{2b_{23}}{\alpha}$$

$$b_{223} = \frac{db_{22}}{d\chi} - 2b_{23}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\ ;\ b_{332} = \frac{db_{33}}{d\theta} - 2b_{33}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$b_{232} = \frac{db_{23}}{d\theta} - b_{23}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$b_{323} = \frac{db_{23}}{d\chi} + b_{22}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - b_{33}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Perciò le equazioni fondamentali stesse si riducono alle seguenti:

$$\text{(15)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{db_{22}}{d\alpha} &= \frac{b_{22}}{\alpha} \\ \frac{db_{33}}{d\alpha} &= \frac{b_{33}}{\alpha} \\ \frac{db_{23}}{d\alpha} &= \frac{b_{23}}{\alpha} \end{aligned}\right.$$

$$\text{(16)}\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{db_{22}}{d\chi} - \frac{db_{23}}{d\theta} &= b_{23}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\ \frac{db_{33}}{} - \frac{db_{23}}{d\chi} &= b_{22}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + b_{23}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,. \end{aligned}\right.$$

Quindi abbiamo dimostrato che il teorema del § 6 può estendersi alle varietà d'elemento lineare (12) sostituite alle equazioni differenziali (B') (B'') le equazioni (15) (16), dalle quali solo le prime sono formalmente diverse dalle corrispondenti (B'). Esse si integrano tuttavia facilmente e danno:

$$b_{22} = \alpha f_{22}(\theta\,,\chi)\ ;\ b_{23} = \alpha f_{23}(\theta\,,\chi)\ ;\ b_{33} = \alpha f_{33}(\theta\,,\chi)\,,$$

$f_{22}\,,f_{23}\,,f_{33}$ indicando tre funzioni di $\theta\,,\chi$ soltanto.

Sostituite le precedenti nell'equazione (14) otteniamo:

$$\frac{f_{22}\,f_{33} - f_{23}^2}{\left(\dfrac{1}{1+k^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta} = k^2\,.$$

Con le posizioni:

$$f_{22}(\theta, \chi) = \frac{k^2}{1+k^2} b'_{22} \ ; \ f_{23}(\theta, \chi) = \frac{k^2}{1+k^2} b'_{23} \ ; \ f_{33}(\theta, \chi) = \frac{k^2}{1+k^2} b'_{33}$$

questa equazione si riduce alla forma:

$$(14') \qquad \frac{b'_{22}\, b'_{33} - b'^{\,2}_{23}}{\frac{1}{k^4} \operatorname{sen}^2 \theta} = k^2$$

mentre le (16) formalmente non mutano, dando:

$$(16') \qquad \begin{cases} \dfrac{db'_{22}}{d\chi} - \dfrac{db'_{23}}{d\theta} = b'_{23} \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \\[2ex] \dfrac{db'_{33}}{d\theta} - \dfrac{db'_{23}}{d\chi} = b'_{22} \cos\theta \operatorname{sen}\theta + b'_{23} \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$

Le (14'), (16') sono rispettivamente le equazioni di Gauss e di Codazzi che, nello spazio euclideo appartengono alla superficie a due dimensioni:

$$\frac{1}{k^2} (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \, d\chi^2)$$

cioè alla sfera di raggio $\frac{1}{k}$. Potremo dunque concludere:

Le varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali sono deformabili. Il problema di determinare tutte le varietà applicabili su una delle date, di curvatura $\frac{k}{\alpha}$, coincide analiticamente con quello della deformazione della sfera di raggio $\frac{1}{k}$, in quanto che per ogni sistema $b'_{22}, b'_{23}, b'_{33}$ di coefficienti della seconda forma fondamentale di questa è noto, dalle equazioni (13) *e dalle*

$$b_{22} = \alpha \frac{k^2}{1+k^2} b'_{22} \ ; \ b_{23} = \alpha \frac{k^2}{1+k^2} b'_{23} \ ; \ b_{33} = \alpha \frac{k^2}{1+k^2} b'_{33} \ (^1),$$

un sistema di coefficienti b_{rs} per la seconda forma fondamentale della prima, e viceversa.

Segue anche qui la possibilità della determinazione geometrica di una delle configurazioni delle varietà studiate per ognuna delle superficie a due dimensioni applicabili sulla sfera, e quella della determinazione inversa.

Quale interesse il ravvicinamento di questi due problemi possa avere per entrambi sarà studiato in altro lavoro.

(1) A queste equivalgono le
$$b_{22} = \alpha(1 - k^2_1) b'_{22} \ ; \ b_{23} = \alpha(1 - k^2_1) b'_{23} \ ; \ b_{33} = \alpha(1 - k^2_1) b'_{33}.$$