ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

TAB. VIII. *Umidità relativa in centesimi 28-29 marzo 1898.*

Gruppo	Catania	Nicolosi	Cantoniera	Etna	Variazione per 100 m. fra le Stazioni		
					Cat.-Nic.	Nic.-Cant.	Cant.-Etna
Mattutino	81	80	88	92	0	+ 1	0
Antimerid.	76	75	69	85	0	— 1	+ 1
Meridiano	64	55	81	84	— 2	+ 2	0
Pomeridiano	71	76	82	87	+ 1	+ 1	0
Serotino	76	72	75	87	0	0	+ 1
Notturno	69	61	89	91	— 1	+ 2	0
Media	73	70	81	88	0	+ 1	+ 1

Matematica. — *Note au sujet de l'intégration approchée de certaines équations différentielles linéaires du second ordre.* Nota del conte MAGNUS DE SPARRE, presentata dal Socio SIACCI.

Je commencerai par faire une remarque au sujet de l'intégration des équations de la mécanique.

Si on envisage une question au point de vue de l'analyse pure, une valeur de la fonction n'est intégrale d'une équation différentielle que si en la substituant elle y satisfait rigoureusement. Au point de vue de la mécanique appliquée il n'en est pas absolument de même. En effet les coefficients qui figurent dans l'équation différentielle ne sont connus qu'avec une certaine approximation et toute valeur de la fonction qui substituée dans le premier membre de l'équation différentielle, fera prendre à ce premier membre une valeur plus petite que l'erreur pouvant résulter de l'incertitude qui existe (dans le cas particulier, où on se trouve) sur les coefficients de l'équation, peut être considérée comme une solution satisfaisante, au point de vue mécanique.

Si en effet la substitution de cette valeur ne rend pas le premier membre rigoureusement nul (mais seulement très petit) cela peut provenir aussi bien de l'erreur qui existe sur les coefficients que de celle provenant de la solution elle même.

On voit par là le grand intérêt que peuvent, au point de vue de la mécanique appliquée, présenter les solutions approchées des équations différentielles.

J'ai eu occasion de rencontrer une question de cette nature dans l'étude du mouvement d'un projectile autour de son centre de gravité et je vais exposer le principe de la méthode qui m'a servi à la résoudre.

Les équations que je considérerai seront de l'une des deux formes

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \alpha^2\varphi(x)\,y = 0$$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha f(x)\frac{dy}{dx} + \alpha^p\varphi(x)\,y = 0$$

où α est un très grand nombre, en valeur absolue, d'ailleurs quelconque, x, $f(x)$ et $\varphi(x)$ conservant au lieu de cela des valeurs finies pas très grandes entre les limites que l'on a à considérer.

La 1ère équation correspond au cas où le coefficient de y est très grand, cas où l'on pourra toujours mettre l'équation sous la forme (1), car il suffit pour cela de désigner par α un nombre tel que le quotient du coefficient de y par α^2 ait un module pas très grand.

La 2me équation correspond au cas où les coefficients de y et $\frac{dy}{dx}$ sont l'un et l'autre très grands, p pouvant d'ailleurs avoir une valeur absolument quelconque.

Nous considérerons comme solution satisfaisante de ces deux équations, au point de vue mécanique, une valeur de y telle qu'en la substituant dans le 1er membre de (1) ou de (2), le résultat contienne $\frac{1}{\alpha}$ en facteur.

Considérons d'abord l'équation (1).

Posons

(3) $$y = e^{\alpha\eta}.$$

L'équation (1) devient

(4) $$\alpha^2\eta'^2 + \alpha\eta'' + \alpha f(x)\,\eta' + \alpha^2\varphi(x) = 0.$$

Nous poserons alors

(5) $$\eta' = z + \zeta$$

avec

(6) $$z^2 + \varphi(x) = 0.$$

L'équation (4) deviendra

(7) $$\alpha^2(2z\zeta + \zeta^2) + \alpha[z' + \zeta' + f(x)\,(z + \zeta)] = 0.$$

Posons alors

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\zeta_1 + \frac{1}{\alpha^2}\zeta_2.$$

Substituons dans (7) et égalons à zéro le coefficient de α et le terme indépendant de cette quantité nous aurons

$$2z\zeta_1 + z' + z\,f(x) = 0$$
$$2z\zeta_2 + \zeta_1^2 + \zeta_1' + \zeta_1 f(x) = 0$$

d'où

$$\zeta_1 = -\frac{z'}{2z} - \frac{1}{2} f(x)$$

$$\zeta_2 = -\frac{\zeta_1^2 + f(x)\zeta_1 + \zeta'_1}{2z}$$

et avec ce choix le 1^{er} membre de (7) et par suite celui de (4) se réduit à

$$\frac{1}{\alpha}\left[2\zeta_1\zeta_2 + \frac{1}{\alpha}\zeta_2^2 + \zeta'_2 + \zeta_2 f(x)\right].$$

Par suite d'après l'hypotèse faite $y = e^{\alpha\eta}$ pourra être considéré comme une solution satisfaisante de l'équation (1). En supposant que z, ζ_1, ζ_2 *restent finis* dans le champs d'intégration *ce qu'il faudra toujours vérifier.*

Comme d'ailleurs l'équation (6) fournit deux valeurs pour z,

$$z_1 = \sqrt{-\varphi(x)} \quad , \quad z_2 = -\sqrt{-\varphi(x)}$$

on aura deux intégrales et par suite l'intégrale générale. On aura ensuite

$$\eta = \int (z + \zeta)\, dx.$$

Mais

$$\int \zeta_1\, dx = -\int \frac{z'}{2z}\, dx - \frac{1}{2}\int f(x)\, dx = \mathrm{L}\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{2}\int f(x)\, dx$$

de sorte qu'en remarquant que ζ_1 ne change pas lorsque z change de signe et que ζ_2 change au lieu de cela de signe, on aura pour les deux intégrales

$$y_1 = \frac{\mathrm{A}e^{\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int f(x)\,dx + \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2\,dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}}$$

$$y_2 = \frac{\mathrm{B}e^{-\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx - \frac{1}{2}\int f(x)\,dx - \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2\,dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}}$$

Nous avons fait rentrer dans les constantes $\dfrac{1}{\sqrt{\pm i}}$.

On aura par suite pour l'intégrale générale

$$y = \frac{\mathrm{A}e^{\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx + \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2 dx} + \mathrm{B}e^{-\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx - \frac{1}{\alpha}\int\zeta_2 dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}}\, e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}.$$

Le plus souvent on pourra négliger le terme en $\frac{1}{\alpha}$ dans l'intégrale et prendre par suite

$$y = \frac{Ae^{\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}dx} + Be^{-\alpha\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx}}{\sqrt[4]{\varphi(x)}} e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}.$$

Le cas de l'équation (2) peut se traiter directement d'une façon semblable, mais il se ramène de suite au précédent en faisant disparaître le coefficient de $\frac{dy}{dx}$, il suffit pour cela de poser, comme on sait

$$y = ue^v$$

d'où

$$y' = u'e^v + uv'e^v$$
$$y'' = u''e^v + 2u'v'e^v + uv'^2e^v + uv''e^v$$

et l'équation devient

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[2v' + \alpha f(x)\right]\frac{du}{dx} + \left[v'^2 + v'' + \alpha v' f(x) + \alpha^p \varphi(x)\right]u = 0$$

on prendra alors

$$v' = -\frac{\alpha}{2} f(x)$$

d'où

$$v'' = -\frac{\alpha}{2} f'(x)$$

et l'équation deviendra

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha^2\left[\alpha^{p-2}\varphi(x) - \frac{1}{2\alpha} f'(x) - \frac{1}{4} f^2(x)\right]u = 0.$$

Si $p \leq 2$ l'équation sera de suite de la forme (1). Si au lieu de cela $p > 2$ on mettra α^p en facteur et en posant $\alpha^p = \alpha_1^2$ l'équation sera encore ramenée à la forme (1).

Toutefois il sera le plus souvent plus simple de traiter directement l'équation (2).

Si on y pose toujours

$$y = e^{\alpha\eta}$$

elle devient

$$\alpha^2\eta'^2 + \alpha\eta'' + \alpha^2\eta' f(x) + \alpha^p\varphi(x) = 0$$

ou

(8) $$\eta'^2 + \eta' f(x) + \alpha^{p-2}\varphi(x) + \alpha^{-1}\eta'' = 0.$$

Nous poserons alors

$$\eta' = z + \zeta$$

avec

$$z^2 + z f(x) + \alpha^{p-2} \varphi(x) = 0$$

d'où

$$(9) \qquad z = -\frac{f(x) \pm \sqrt{f^2(x) - 4\alpha^{p-2} \varphi(x)}}{2}$$

et le 1[er] nombre de (8) deviendra

$$(10) \qquad 2z\zeta + \zeta^2 + \zeta f(x) + \alpha^{-1}(z' + \zeta') = 0 .$$

Nous poserons alors, comme dans le cas précédent

$$\zeta = \frac{1}{\alpha}\zeta_1 + \frac{1}{\alpha^2}\zeta_2$$

et en égalant à zéro les coefficients des puissances -1 et -2 de α on aura

$$2z\zeta_1 + \zeta_1 f(x) + z' = 0$$
$$2z\zeta_2 + \zeta_1^2 + \zeta_2 f(x) + \zeta'_1 = 0$$

d'où

$$\zeta_1 = -\frac{z'}{2z + f(x)} \qquad\qquad \zeta_2 = -\frac{\zeta'_1 + \zeta_1^2}{2z + f(x)}$$

et on aura ainsi une solution approchée de l'équation (2). Si $p \leq 1$ auquel cas $p - 2 \leq -1$ on pourra développer la valeur de z et écrire

$$z = -\frac{1}{2} f(x) \pm \frac{1}{2} f(x) \left[1 - \frac{4\alpha^{p-2} \varphi(x)}{f^2(x)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$z_1 = -f(x) + \frac{\alpha^{p-2}\varphi(x)}{f(x)} + \frac{\alpha^{2p-4}\varphi^2(x)}{f^3(x)}$$
$$z_2 = - \qquad \frac{\alpha^{p-2}\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\alpha^{2p-4}\varphi^2(x)}{f^3(x)} .$$

La méthode s'applique également pour trouver les intégrales approchées des équations différentielles pour de très grandes valeurs de la variable.

Soit comme exemple l'équation

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (2n+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Dont nous voulons obtenir l'intégrale générale approchée pour x très grand en valeur absolue. Nous poserons

$$x = \alpha\xi$$

α étant égal au maximum du module de x pour les valeurs que l'on a à considérer, de telle sorte que ξ aura un module un peu inférieur à 1 mais peu différent de 1 et que α sera un très grand nombre.

L'équation devient

$$\frac{\xi}{\alpha}\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{2n+1}{\alpha}\frac{dy}{d\xi}+\alpha\xi y=0$$

ou

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{2n+1}{\xi}\frac{dy}{d\xi}+\alpha^2 y=0.$$

Équation de la forme (1).

Ici

$$f(x)=\frac{2n+1}{\xi} \qquad \varphi(x)=1 \qquad (x \text{ étant remplacé par } \xi)$$

donc

$$\frac{1}{2}\int f(x)\,dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int\frac{d\xi}{\xi}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\xi\ ;\ e^{-\frac{1}{2}\int f(x)\,dx}=\frac{1}{\xi^n\sqrt{\xi}}$$

$$\int\sqrt{-\varphi(x)}\,dx=i\xi$$

de plus

$$\zeta_1=-\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{\xi}=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\xi}$$

$$z=\pm i$$

et

$$\zeta_2=-\frac{\zeta_1^2+f(x)\zeta_1+\zeta'_1}{2z}=\pm\frac{i}{2}\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\frac{1}{\xi^2}=\pm\left(\frac{1}{4}-n^2\right)\frac{i}{2\xi^2}$$

donc

$$\int\zeta_2\,dx=\mp\left(n^2-\frac{1}{4}\right)i\int\frac{d\xi}{2\xi^2}=\pm i\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2\xi}.$$

On a donc pour l'intégrale générale de l'équation considérée

$$\frac{1}{\xi^n\sqrt{\xi}}\left[\mathrm{A}\,e^{\alpha i\xi+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2\alpha\xi}}+\mathrm{B}e^{-\alpha i\xi-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2\alpha\xi}}\right]$$

ou en remplaçant ξ par $\dfrac{x}{\alpha}$

$$\frac{1}{x^n\sqrt{x}}\left[\mathrm{A}_1 e^{ix+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2x}}+\mathrm{B}_1\,e^{-ix-\left(n^2-\frac{1}{4}\right)\frac{i}{2x}}\right]$$

ou enfin

$$\frac{1}{x^n\sqrt{x}}\left[\mathrm{C}\cos\left(x+\frac{n^2-\frac{1}{4}}{2x}\right)+\mathrm{D}\sin\left(x+\frac{n^2-\frac{1}{4}}{2x}\right)\right].$$

Si on néglige les termes en $\dfrac{1}{x}$ on retombe sur le résultat connu.

Si l'équation a un second membre on pourra déduire la solution de l'équation complète de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, mais le plus souvent on pourra obtenir une intégrale particulière approchée développée suivant les puissances décroissantes de α. Si on a l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^n f(x) \frac{dy}{dx} + \alpha^p \varphi(x)\, y = \alpha^q \chi(x)$$

et si $p > n$ on posera

$$y = \alpha^{q-p}\, \eta_0 + \alpha^{q-p-1}\, \eta_1 + \alpha^{q-p-2}\, \eta_2$$

et égalant les coefficients des puissances semblables de α on aura des relations qui permettront de calculer $\eta_0\, \eta_1 \ldots$

Si $n > p$ on poserait

$$y = \alpha^{q-n}\, \eta_0 + \alpha^{q-n-1}\, \eta_1 + \cdots$$

en continuant jusqu'à ce qu'on arrive à une approximation convenable.

Il faut toutefois remarquer que la méthode tombe en défaut si l'une des fonctions $\eta_0\, \eta_1 \ldots$ devient infini ou prend même une valeur comparable à α, il y a donc une vérification indispensable à faire à ce sujet.

Matematica. — *Sulla trasformazione di Laplace*. Nota di Ugo Amaldi, presentata dal Corrispondente S. Pincherle.

Mi propongo di esporre un breve saggio preliminare delle proprietà di una certa *operazione distributiva*, della quale la classica *trasformazione di Laplace* (¹) rappresenta una determinazione o *ramo*. Il metodo che ho seguito è il metodo *sintetico*, cioè indipendente da ogni rappresentazione analitica dell'operazione, quale fu ideato ed applicato dal Pincherle in questi ultimi anni allo studio delle *operazioni distributive* (²).

1. Immagino di operare sugli enti della varietà V_ϱ di tutte le serie

$$\varphi = x^\varrho \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n\, x^n ,$$

dove ϱ è un parametro complesso e l'indice n varia nel campo dei numeri reali interi, e, prescindendo da ogni questione di convergenza, intendo incluse

(¹) Su questa operazione vedi: Poincaré, Americ. Journ. of Mathematics, vol. VII; Acta Math., Bd. VIII; Pincherle. Mem. dell'Acc. di Bologna, S. IV, t. VII e VIII; Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, I Bd., VII Abschnitt.

(²) *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Math. Annalen, Bd. 49.