ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Si l'équation a un second membre on pourra déduire la solution de l'équation complète de l'intégrale générale de l'équation sans second membre, mais le plus souvent on pourra obtenir une intégrale particulière approchée développée suivant les puissances décroissantes de α. Si on a l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^n f(x) \frac{dy}{dx} + \alpha^p \varphi(x)\, y = \alpha^q \chi(x)$$

et si $p > n$ on posera

$$y = \alpha^{q-p} \eta_0 + \alpha^{q-p-1} \eta_1 + \alpha^{q-p-2} \eta_2$$

et égalant les coefficients des puissances semblables de α on aura des relations qui permettront de calculer $\eta_0\, \eta_1 \ldots$

Si $n > p$ on poserait

$$y = \alpha^{q-n} \eta_0 + \alpha^{q-n-1} \eta_1 + \cdots$$

en continuant jusqu'à ce qu'on arrive à une approximation convenable.

Il faut toutefois remarquer que la méthode tombe en défaut si l'une des fonctions $\eta_0\, \eta_1 \ldots$ devient infini ou prend même une valeur comparable à α, il y a donc une vérification indispensable à faire à ce sujet.

Matematica. — *Sulla trasformazione di Laplace.* Nota di Ugo Amaldi, presentata dal Corrispondente S. Pincherle.

Mi propongo di esporre un breve saggio preliminare delle proprietà di una certa *operazione distributiva*, della quale la classica *trasformazione di Laplace* (1) rappresenta una determinazione o *ramo*. Il metodo che ho seguito è il metodo *sintetico*, cioè indipendente da ogni rappresentazione analitica dell'operazione, quale fu ideato ed applicato dal Pincherle in questi ultimi anni allo studio delle *operazioni distributive* (2).

1. Immagino di operare sugli enti della varietà V_ϱ di tutte le serie

$$\varphi = x^\varrho \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n x^n ,$$

dove ϱ è un parametro complesso e l'indice n varia nel campo dei numeri reali interi, e, prescindendo da ogni questione di convergenza, intendo incluse

(1) Su questa operazione vedi: Poincaré, Americ. Journ. of Mathematics, vol. VII; Acta Math., Bd. VIII; Pincherle. Mem. dell'Acc. di Bologna, S. IV, t. VII e VIII; Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, I Bd., VII Abschnitt.

(2) *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Math. Annalen, Bd. 49.

nella detta varietà anche le serie, che non convergono in nessun punto del piano della variabile complessa. È evidente che questa varietà ad infinite dimensioni è uno *spazio lineare*. I coefficienti delle serie si potranno dire *coordinate* degli enti che si considerano, e gli enti $x^{\varrho+n}$ $(n = -\infty \cdots +\infty)$ rappresenteranno la figura di riferimento di tale sistema di coordinate.

Indicando con φ un ente generico dello spazio V_ϱ, considero un' *operazione distributiva* L, che goda delle proprietà indicate dalle due equazioni simboliche

$$a) \qquad L(x\varphi) = DL(\varphi)$$
$$b) \qquad xL(\varphi) = -LD(\varphi),$$

dove il simbolo D rappresenta l' ordinaria operazione di derivazione.

Si ammetta per ora l' esistenza di una siffatta operazione, che, anticipando una denominazione, che sarà giustificata in fine alla presente Nota, designerò col nome di *trasformazione di Laplace*.

Ricordando la definizione di *derivata funzionale* di un' operazione distributiva [1] e indicandola con un accento, si ha dalle $a)$, $b)$ che la derivata funzionale della operazione L è legata all' operazione stessa dalla relazione

$$L' = LD + DL.$$

Per combinazione delle due equazioni $a)$ e $b)$ si ottiene

$$c) \qquad Lx^m D^n\varphi = (-1)^n D^m x^n L\varphi.$$

Infine con iterazione e successiva combinazione delle $a)$, $b)$ si ottengono i tre sistemi di equazioni simboliche

$$(1) \qquad L^2 x\varphi = -xL^2\varphi, \quad L^2 D\varphi = -DL^2\varphi;$$
$$(2) \qquad L^3 x\varphi = -DL^3\varphi, \quad L^3 D\varphi = xL^3\varphi;$$
$$(3) \qquad L^4 x\varphi = xL^4\varphi, \quad L^4 D\varphi = DL^4\varphi;$$

che esprimono proprietà delle operazioni L^2, L^3, L^4 rispettivamente.

2. Per riconoscere se esiste effettivamente un' operazione, che renda soddisfatte le equazioni $a)$ e $b)$, e per costruirla su ogni ente di V_ϱ, cerco quale sarebbe l' effetto prodotto da essa sugli enti fondamentali $x^{\varrho+n}(n=-\infty \cdots +\infty)$. Seguendo le notazioni del Pincherle, pongo $L(x^m) = \xi_m(x)$. Sostituisco $x^{\varrho+n-1}$ a φ nelle $a)$ e $b)$, e ottengo per $\xi_{\varrho+n}(x)$, funzione dell' indice intero n e della variabile complessa x, il sistema di equazioni miste differenziali e alle differenze

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_{\varrho+n}(x) = D\xi_{\varrho+n-1}(x) \\ x\xi_{\varrho+n-1}(x) = -(\varrho+n-1)\,\xi_{\varrho+n-2}. \end{cases}$$

[1] Pincherle, *Mémoire sur le calc. fonct. distr.*, Cap. II, §. 56.

Integrando questo sistema si ottiene

$$\xi_{\varrho+n}(x) = e^{\pi i(\varrho+n)}\,\Gamma(\varrho+n+1)\,x^{-(\varrho+n+1)}\,, \tag{5}$$

dove al solito con $\Gamma(n)$ si indica l'*integrale euleriano di seconda specie.*

3. Da quanto precede si deduce facilmente qualche notizia sulla natura dell'operazione L^2. Ho

$$L^2(x^{\varrho+n}) = L(\xi_{\varrho+n}) = e^{-\pi i}\,\Gamma(\varrho+n+1)\,\Gamma(-\varrho-n)x^{\varrho+n}\,.$$

Ma, per una ben nota proprietà della funzione Γ, sussiste l'eguaglianza

$$\Gamma(\varrho+n+1)\,\Gamma(-\varrho-n) = (-1)^{n+1}\,\Gamma(\varrho)\,\Gamma(-\varrho-1):$$

ne discende

$$L^2(x^{\varrho+n}) = e^{\pi i\varrho}\,\Gamma(\varrho)\,\Gamma(-\varrho-1)\,(-x)^{\varrho+n}\,.$$

Poichè non si riguardano come distinte due operazioni distributive, che differiscono per un'operazione di moltiplicazione a moltiplicatore costante, posso concludere che:

Nello spazio V_ϱ *l'operazione* L^2 *coincide con l'operazione* S_{-x} *di sostituzione, per la quale* $S_{-x}\,\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Ne risulta che, nello spazio V_ϱ, la L è commutabile con la S_{-x}.

Della L^2 si ottiene agevolmente lo sviluppo in serie di potenze intere e positive della D, applicando il metodo dei coefficienti indeterminati. Si ricordino invero le equazioni (1), le quali esprimono proprietà della L^2: e in esse si sostituisca uno sviluppo

$$L^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)\,D^n\,,$$

dove $\alpha_n(x)$ è una funzione, da determinarsi, dell'indice intero positivo n e della variabile complessa x. Per essa si ottiene il sistema di equazioni miste differenziali e alle differenze

$$\begin{cases} (n+1)\,\alpha_{n+1} + 2x\alpha_n = 0 \\ D\alpha_n + 2\alpha_{n-1} = 0\,, \end{cases}$$

il cui integrale è dato da $\alpha_n(x) = (-1)^n \dfrac{2^n}{n!}\,\alpha_0\,x^n$: α_0 è costante arbitraria.

Scelto $\alpha_0 = 1$, ottengo per L^2 lo sviluppo

$$L^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}\,x^n\,D^n\,.$$

Dall'osservazione fatta dianzi risulta ancora che:

La operazione L *è, nello spazio* V_ϱ, *ciclica dell'ordine* 4.

Dall' eguaglianza simbolica $L^4 = 1$ discende [1]

$$L^{-1} = L^3 .$$

Poichè la L, come appare chiaro dal numero precedente, è nello spazio V_ϱ a determinazione unica, l' ultima eguaglianza ci dice che la operazione L^{-1}, *inversa* di L, è essa pure in quello spazio a determinazione unica, e, quindi che la trasformazione di Laplace non ammette radici entro lo spazio V_ϱ.

Ricordo da ultimo le equazioni simboliche (2): con un procedimento analogo a quello seguìto al n. 2, ottengo per gli enti $\xi_{\varrho+n}(x)$, relativi ad $L^3 = L^{-1}$ in V_ϱ, l' espressione

$$\xi_{\varrho+n}(x) = \Gamma(\varrho + n + 1)\, x^{-(\varrho+n+1)} .$$

4. Le asserzioni dei n. 2 e 3 non restano valide per qualsiasi valore del parametro ϱ. Poichè l' integrale euleriano di seconda specie ammette come punti singolari tutti i punti del piano complesso, a cui sono affissi numeri interi negativi, l' espressione assegnata al n. 2 per l' ente $\xi_{\varrho+n}(x)$, relativo alla L, perde ogni significato per i valori $n = -k-2, -k-3, -k-4, \ldots$ dell' indice, quando sia $\varrho = k$, per k intero (positivo o negativo): cioè la determinazione dell' operazione L, fissata al n. 2, viene a mancare in infiniti punti di ciascuno spazio V_ϱ, pel quale il parametro abbia un valore intero. Basterà evidentemente considerare a parte lo spazio V_0 delle serie di Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_n$, al quale, come è chiaro, si riducono tutti gli spazi V_ϱ a parametro intero: ma io qui considererò più in particolare lo spazio $\overline{V}_0$, che si ottiene da V_0, togliendone gli enti fondamentali x^{-1} e $x^0 = 1$. In tale spazio il sistema (4) si riduce al sistema

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi_n(x) = D\xi_{n-1}(x) \\ x\xi_n(x) = -n\xi_{n-1}(x) , \end{cases} \qquad (n = -\infty, \ldots, -2, 2, 3, \ldots, \infty)$$

il quale è soddisfatto dalle espressioni

$$\begin{cases} \xi_{-n}(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & (n = 2, 3, \ldots, \infty) \\ \xi_n(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)} & (n = 1, 2, \ldots, \infty) . \end{cases}$$

Queste perciò definiscono entro $\overline{V}_0$ un'operazione, a determinazione unica, soddisfacente alla definizione della L. Si verifica senza difficoltà che tale operazione gode in $\overline{V}_0$ della proprietà, di esser ciclica d'ordine 4 [2].

[1] Quest' eguaglianza si poteva dedurre direttamente, osservando che le equazioni (2) coincidono con quelle, che dalle $a)$, $b)$ si deducono per la operazione L^{-1}.

[2] Mi riserbo di tornare in altra occasione sulla definizione di L entro l'intero spazio V_0 delle serie di Laurent. Intanto non sembri troppo arbitraria la modificazione introdotta dianzi in tale spazio. Lo studio del sistema (6), considerato per tutti i valori interi del-

5. Prima di procedere oltre osserverò che la scelta degli spazi V_ρ non è collegata in modo necessario con la definizione dell'operazione L: anzi, in ultima analisi, le sole proprietà di tali spazi, che stanno in relazione essenziale con la natura dell'operazione dianzi studiata, sono la *linearità* e la *invarianza*, in guisa che noi possiamo, senza che mutino i caratteri e le proprietà dell'operazione L, considerata in sè medesima, sostituire a quegli spazi altri spazi di funzioni, purchè siano *lineari*, ed *invarianti* rispetto alla L.

6. Accanto ad ogni operazione distributiva A, si può considerare un'altra operazione $\overline{A}$, che fu detta *aggiunta* della prima [1], e che, nel caso, in cui l'operazione distributiva data sia una forma differenziale lineare, si riduce alla solita *aggiunta di Lagrange*.

Volendo studiare l'*aggiunta* $\overline{L}$ di L, debbo anzitutto accennare al modo, in cui è stata definita in generale l'*aggiunta* di un'operazione distributiva. Dato uno spazio, il quale sia lineare e invariante rispetto all'operazione A che si considera, e, di più, contenga insieme con ogni suo ente φ anche l'ente $x\varphi$, si suppone definita *in qualsiasi modo* un'operazione, che sia applicabile ad ogni coppia φ, f di enti dello spazio dato: si indica con (φ, f) e si ammettono per essa le seguenti proprietà:

α) di essere a determinazione unica;

β) di essere distributiva tanto rispetto ad f che rispetto a φ;

γ) di essere tale che se, per ogni funzione f dello spazio, si ha $(\varphi, f) = (\varphi_1, f)$ ne debba risultare $\varphi = \varphi_1$, e se, per ogni funzione φ si ha $(\varphi, f) = (\varphi, f_1)$, ne debba risultare $f = f_1$;

---

l'indice, porta a concludere l'esistenza di due rami di operazione, che soddisfanno bensì alle equazioni *a*) e *b*), ma non trasformano in sè stesso lo spazio V_0, e perciò non godono di gran parte delle proprietà dimostrate precedentemente per la L negli spazi V_ρ. Di questi due rami l'uno trasforma lo spazio $S'(x^{-1}, x^{-2}, \ldots, x^{-n}, \ldots)$ delle serie di potenze intere negative, prive di termine costante, nello spazio $S(1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ delle serie di potenze intere positive, e ammette come radici gli enti $1, x, x^2, \ldots$ e quindi tutti gli enti dello spazio S: l'altro è a determinazione multipla, in quanto ad ogni funzione ne fa corrispondere infinite, differenti fra loro pel valore di una costante additiva arbitraria, e trasforma lo spazio S nello spazio S'. Dirò, per incidenza, che quest'ultimo ramo ammette il seguente sviluppo in serie di potenze intere dell'operazione D:

$$L = D^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n-1}}{n!} + \frac{x^{n-3}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^{-(n-1)}}{1!} + x^{-(n+1)} \right) D^n .$$

Ora, perchè fosse applicabile allo spazio V_0 la teoria che vale per la L negli spazi V_ρ generici, bisognerebbe deteterminare un ramo di L, che non fosse *degenere* in V_0 e trasformasse tale spazio in sè stesso. L'esame dei due rami di L dianzi considerati suggerisce l'idea di connettere *convenzionalmente* la determinazione del primo ramo, relativa allo spazio S', con la determinazione del secondo ramo relativa allo spazio S. Questa connessione non è consentita dal sistema (6) se non nello spazio $\overline{V}_0$, il quale si può dire *intersezione* dei due *iperpiani* di V_0 che son definiti dalle equazioni $a_{-1} = 0$ ed $a_0 = 0$.

[1] Pincherle, *Sull'operazione aggiunta*, Rend. delle sessioni dell'Acc. di Bologna, 1897-1898.

δ) di essere tale che $(x\varphi\,,f) = (\varphi\,,xf)$.

Un' operazione $\overline{A}$ si dice *aggiunta* di A quando sia $(A(\varphi),f)=(\varphi,\overline{A}(f))$.

Fra i teoremi dimostrati in proposito ricorderò il seguente [1]: « Se $\overline{A}\,,\overline{B}\,,\overline{C}\,,\ldots,\overline{X}$ sono le aggiunte delle operazioni $A\,,B\,,C\,,\ldots,X$ rispettivamente, e si ha $X = ABC\ldots$ si avrà $\overline{X}=\ldots\overline{C}\overline{B}\overline{A}$ ».

Ora designo con W uno spazio qualsiasi, che goda, rispetto alla L, delle proprietà dianzi indicate in generale [2]: in esso avremo

$$(Lx\varphi\,,f) = (\varphi\,,x\overline{L}f).$$

Ma per la a), per il teorema or ora enunciato e per essere l' aggiunta $\overline{D}$ della derivazione D uguale a $-D$, viene:

$$(Lx\varphi\,,f) = (DL\varphi\,,f) = (\varphi\,,\overline{L}\overline{D}f) = -(\varphi\,,\overline{L}Df);$$

quindi si conclude, per la definizione dell' operazione $(\varphi\,,f)$,

$$x\overline{L}f = -\overline{L}Df.$$

Similmente si ha

$$(xL\varphi\,,f) = -(\varphi\,,\overline{L}xf):$$

d' altra parte, in virtù della b),

$$(xL\varphi\,,f) = -(LD\varphi\,,f) = -(\varphi\,,\overline{D}\overline{L}f) = (\varphi\,,D\overline{L}f);$$

quindi

$$\overline{L}(xf) = D\overline{L}f\,.$$

Concludendo, ottengo per la operazione $\overline{L}$ le medesime equazioni simboliche assegnate per la L: posso quindi enunciare il teorema:

La trasformazione di Laplace coincide con la sua aggiunta.

7. Lo Schlesinger ha dimostrato [3] che « la *aggiunta* (di Lagrange) della trasformata di Laplace di una forma differenziale lineare di rango 1 è tale, che la sua trasformata di Laplace è la *aggiunta* della primitiva ».

Il teorema del n. precedente permette di generalizzare questa osservazione ad un' operazione distributiva qualsivoglia. Sia A un' operazione distributiva qualsiasi; pongo

$$LAL^{-1} = A_1\,.$$

Poichè le operazioni distributive formano un *gruppo*, sarà distributiva, insieme con $L\,,A\,,L^{-1}$, anche la A_1. Si avrà allora pel teorema enunciato al n. precedente

$$\overline{A}_1 = \overline{L}^{-1}\overline{A}\overline{L}\,.$$

Ma abbiamo dimostrato dianzi che $\overline{L}L^{-1} = 1$ e quindi che $L\overline{L}^{-1} = 1$; ne viene

$$L\overline{A}_1L^{-1} = \overline{A}\,.$$

(1) Pincherle, *Sull' operazione aggiunta*, § 6.

(2) Di tutte e tre quelle proprietà godono gli spazi V_ρ generici, non per altro lo spazio $\overline{V}_0$.

(3) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. I Bd, S. 426.

Dunque *la aggiunta* $\overline{A}_1$ *della trasformata di Laplace* A_1 *di un' operazione distributiva* A *qualsiasi è tale, che la sua trasformata di Laplace coincide con l' aggiunta di* A.

8. L' operazione L può essere usata per trasformare operazioni distributive di tipo noto in operazioni meno studiate, e quindi per dedurre, da proprietà conosciute di quelle, nuove proprietà per queste.

Considero, p. es., una qualsiasi forma differenziale lineare F, i cui coefficienti siano serie di potenze intere positive della x: sia precisamente

$$F = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} a_{rs} D^r x^s .$$

Avrò per la c),

$$LFL^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} (-1)^s a_{rs} x^s D^r ,$$

cioè otterrò lo sviluppo in serie di potenze della D, di un'operazione, i cui coefficienti sono tutti polinomî dello stesso grado n. Reciprocamente, un semplice computo di parametri ci assicura che ogni operazione di siffatto tipo si può riguardare come la trasformata di Laplace di una forma differenziale lineare, avente come coefficienti delle serie di potenze intere positive della variabile.

Considero in secondo luogo come la L trasformi le operazioni distributive *normali*, cioè quelle del tipo

$$A = \sum_{r=0}^{\infty} x^r \alpha_r D^r ,$$

ove sia $\alpha_r = \sum_{s=0}^{\infty} a_{r.s} x^s$. Ho allora

$$LAL^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^r a_{r.s} D^{r+s} x^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^r a_{r.s} \left(x^r D^{r+s} + r \binom{r+s}{1} x^{r-1} D^{r+s-1} + \right.$$

$$\left. + r(r-1) \binom{r+s}{2} x^{r-2} D^{r+s-2} + \cdots + r! D^s \right),$$

cioè ottengo, come trasformata di un' operazione *normale*, una serie di potenze intere e positive di D, i cui coefficienti sono polinomî di grado, rispettivamente, *non maggiore* dell' esponente della relativa potenza di D. Inversamente, la L^{-1} trasforma ogni operazione siffatta in un' operazione *normale*.

Dalla espressione data or ora di LAL^{-1} discende chiaramente, che le sole operazioni *normali*, che sono trasformate dalla L in forme differenziali

lineari, sono le forme differenziali lineari, (*normali*) a coefficienti razionali. Reciprocamente, condizione non pur necessaria, ma anche sufficiente, affinchè una forma differenziale lineare

$$F = P_0 D^0 + P_1 D + P_2 D^2 + \cdots + P_m D^m$$

sia dalla L^{-1} trasformata in una forma differenziale lineare *normale* (a coefficienti razionali) si è che in essa $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m$ siano polinomi di grado, ciascuno, *non maggiore* dell'indice rispettivo. In particolare rendono soddisfatta questa condizione quelle forme differenziali lineari, in cui i successivi coefficienti sono polinomi di grado, ciascuno, eguale al rispettivo esponente della D, ed è noto che siffatte forme, ove ogni radice $r$pla di P_0 sia $(r-1)$pla per P_1, $(r-2)$pla per $P_2, \ldots$, radice semplice per P_r, appartengono alla classe del Fuchs. Si verifica invero direttamente che le forme differenziali lineari *normali*

$$\Phi = x^n D^n + x^{n-1}(a_{0.n-1} + a_{1.n-1}x) D^{n-1} + x^{n-2}(a_{0.n-2} + a_{1.n-2}x + a_{2.n-2}x^2) D^{n-2} + \cdots + \\ + (a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + \cdots + a_{n.0}x^n) D^0$$

sono trasformate dalla L in forme differenziali lineari F, in cui ogni coefficiente P_i è un polinomio di grado i $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$. Reciprocamente, noterò che una *qualsivoglia* forma differenziale lineare del Fuchs si può considerare (a meno, in certi casi, di un semplicissimo cambiamento di funzione) quale trasformata di Laplace di una forma Φ. Le equazioni $\Phi = 0$, ci danno una classe di equazioni differenziali lineari a integrali *irregolari* (nell'intorno del punto $x = \infty$), che, sotto le restrizioni indicate dianzi per i coefficienti, la L trasforma in equazioni (del Fuchs) a integrali *regolari* nell'intorno di ogni loro punto singolare [1].

9. Nell'Analisi si dà il nome di *trasformazione di Laplace* alla trasformazione di φ in ψ

$$\psi(z) = \int_l \varphi(x)\, e^{zx}\, dx\,.$$

Questa trasformazione, in ogni spazio lineare di funzioni analitiche, quando si scelga convenientemente la linea l nel piano complesso, rappresenta un'operazione distributiva, soddisfacente alle $a)$, $b)$. Essa quindi fornisce, in ogni siffatto spazio, l'espressione analitica di un *ramo* dell'operazione L.

[1] Le $\Phi = 0$ sono un caso particolare delle ben note equazioni del Poincaré: vedi American Journal of Mathematics, vol. VII: e Acta Mathematica, Bd. VIII.