ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 4 settembre 1898

Fisica matematica. — *Esposizione di due nuovi metodi per determinare l' espressione della densità in ogni punto di uno strato ellissoidico equipotenziale.* Nota di P. Paci, presentata dal Socio E. D' Ovidio.

Credo interessante di far conoscere due nuovi metodi che conducono alla nota espressione della densità in ogni punto di una superficie ellissoidica, i quali io credo possano servire d' indirizzo in altri casi più complicati.

Il secondo di tali metodi ha inoltre il particolare vantaggio di condurre ad alcuni teoremi nuovi intorno alle funzioni sferiche.

Per l' esposizione del primo metodo si consideri l' equazione della superficie ellissoidica sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

e per semplicità se ne indichi il primo membro con f. Inoltre si indichi con $\varDelta f$ il noto parametro differenziale di primo ordine, e si indichino con f' e $\varDelta f'$ le analoghe espressioni pel punto (x', y', z') della superficie stessa.

Allora, se si assume come senso positivo della normale alla superficie in un punto qualunque il senso verso l' esterno e si indica con n la normale stessa, con P_0 la componente dell' attrazione nel punto (x, y, z) e con K e K′ le densità nel punto potenziato e nel punto di coordinate correnti (x', y', z'), si avrà

$$P_0=\int K'\,\frac{\cos(rn)}{r^2}\,ds',$$

dove con r al solito è indicata la distanza dei due punti (x, y, z), (x', y', z'), con ds' l'elemento della superficie e con (rn) l'angolo formato da r colla normale positiva.

Se ora immaginiamo la sfera di raggio uguale ad uno con centro nel punto potenziato ed indichiamo con $d\sigma'$ l'elemento della sua superficie che corrisponde all'elemento ds', si avrà la relazione

$$ds' \cos(rn') = -r^2\, d\sigma' ;$$

per cui si potrà porre

$$P_0 = -\int K' \frac{\cos(rn)}{\cos(rn')}\, d\sigma' .$$

Ora è facile vedere che si ha

$$\cos(rn) = \frac{1}{\sqrt{\Delta f}} \left(\frac{x'-x}{r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y'-y}{r} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{z'-z}{r} \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

$$\cos(rn') = \frac{1}{\sqrt{\Delta f'}} \left(\frac{x-x'}{r} \frac{df'}{\partial x'} + \frac{y-y'}{r} \frac{\partial f'}{\partial y'} + \frac{z-z'}{r} \frac{\partial f'}{\partial z'} \right);$$

ed è facile constatare immediatamente che nel caso nostro le espressioni dentro parentesi sono identiche, per cui si avrà

$$\frac{\cos(rn)}{\cos(rn')} = \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}} ,$$

e quindi

$$P_0 = -\int K' \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}}\, d\sigma' .$$

Ora se sulla normale nel punto (x, y, z) si considera un punto interno alla superficie infinitamente prossimo al punto potenziato a distanza ε da questo e si indica con $\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-\varepsilon}$ il valore della derivata della funzione potenziale secondo la normale positiva nel punto stesso, per un noto teorema [1] si avrà

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-\varepsilon} = P_0 + 2\pi K .$$

Inoltre da un altro teorema [2], che è una immediata conseguenza del teorema di Green, consegue che condizione necessaria e sufficiente perchè su tutta la superficie e nell'interno la funzione potenziale sia costante, è che nell'interno per tutti i punti infinitamente prossimi alla superficie si abbia

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)_{-\varepsilon} = 0 ,$$

(1) B. Riemann, *Schwere, Elektricität und Magnetismus.* Hannover, 1876, pag. 50.

(2) G. Kirchhoff, *Vorlesungen über matematische Physik.* Leipzig, 1883; *Mechanik,* pag. 184.

la quale si traduce nell' altra

$$P_0 + 2\pi K = 0,$$

od anche

$$\int K' \frac{\sqrt{\Delta f'}}{\sqrt{\Delta f}}\, d\sigma' = 2\pi K.$$

Ora è facile osservare che questa relazione è soddisfatta se si pone

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}, \quad K = \frac{H}{\sqrt{\Delta f}},$$

dove con H è denotata una costante qualunque.

Infatti con ciò la precedente relazione si trasforma nell' altra

$$\int d\sigma' = 2\pi,$$

la quale evidentemente è soddisfatta, giacchè l' integrazione si estende a metà dalla superficie sferica di raggio ugual uno.

Per l' esposizione del secondo metodo s' immagini descritta una sfera di raggio ϱ concentrica coll' ellissoide e tutta interna rispetto alla superficie del medesimo, e si indichino con ϱ, θ, φ le coordinate polari di un punto della superficie sferica rispetto al suo centro e con $\varrho', \theta', \varphi'$ le coordinate correnti di un punto della superficie dell' ellissoide. Dopo l' ipotesi fatta intorno alla posizione della sfera si avrà $\varrho < \varrho'$, qualunque sia ϱ'; per cui si potrà sviluppare la funzione potenziale dello strato ellissoidico per funzioni sferiche nel seguente modo:

$$V = \sum_0^\infty \varrho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n+1}} K'\, ds',$$

dove P_n rappresenta la nota funzione sferica, ed è

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Se ora si considera la superficie sferica concentrica coll' ellissoide e di raggio uguale ad uno, e si denota con $d\sigma'$ l' elemento della sua superficie che corrisponde all' elemento della superficie ellissoidica e con $(\varrho' n')$ l' angolo acuto formato dalla direzione di ϱ' colla normale esterna, si avrà

$$ds' \cos(\varrho' n') = \varrho'^2\, d\sigma',$$

ossia

$$ds' \left(\frac{x'}{\varrho'} \frac{\partial f'}{\partial x'} + \frac{y'}{\varrho'} \frac{\partial f'}{\partial y'} + \frac{z'}{\varrho'} \frac{\partial f'}{\partial z'} \right) \frac{1}{\sqrt{\Delta f'}} = \varrho'^2\, d\sigma',$$

od anche

$$ds' \frac{2}{\varrho' \sqrt{\Delta f'}} = \varrho'^2\, d\sigma',$$

ed infine

$$\frac{ds'}{\varrho'^3} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta f'}\,d\sigma';$$

per cui il precedente sviluppo di V si può cambiare nel seguente:

$$V = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \varrho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n-2}} \sqrt{\Delta f'}\,K'\,d\sigma'.$$

Se ora si pone

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}, \qquad \text{(H costante)}$$

si avrà

$$V = \frac{H}{2}\sum_0^\infty \varrho^n \int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n-2}}\,d\sigma'.$$

Ora per dimostrare che, dopo l'espressione assunta per la densità, V è costante su tutta la superficie dell'ellissoide, basterà far vedere che V è costante su tutta la superficie della sfera di raggio ϱ, giacchè dovrà di conseguenza essere costante per tutti i punti interni alla medesima e per un noto teorema di Gauss ([1]) dovrà essere pure costante in tutto l'interno e sulla superficie dell'ellissoide.

Osserviamo che il primo termine dello sviluppo precedente è

$$\frac{H}{2}\int \varrho'^2\,d\sigma',$$

ed è indipendente da ϱ, θ, φ; e siccome V deve essere costante qualunque sia ϱ per quanto piccolo se deve esser costante sulla superficie dell'ellissoide, ne consegue che condizione necessaria e sufficiente perchè lo strato ellissoidico considerato sia equipotenziale, è che i singoli termini del precedente sviluppo ad eccezione del primo si annullino, vale a dire dovrà aversi

$$\int \frac{P_n(\cos\omega)}{\varrho'^{n-2}}\,d\sigma' = 0$$

per tutti i valori di n cominciando da uno.

Molto facilmente si vede che la relazione ora scritta ha luogo per n dispari, giacchè ad ogni elemento positivo dell'integrale ne corrisponde uno negativo di egual valore assoluto; per cui non ci resterà che a dimostrare che è

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2n-2}}\,d\sigma' = 0$$

per tutti i valori di n cominciando da uno.

([1]) P. G. Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über die im umgekerten Verhältniss ...* ecc. *herausgegeben von D^r. F. Grube.* Leipzig, 1876, pag. 180.

Per $n = 1$ è facile dimostrare direttamente che si ha

$$\int P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0 .$$

Infatti assumendo come asse polare il raggio che va al punto potenziato sulla sfera di raggio ϱ, si potrà porre

$$d\sigma' = \operatorname{sen}\omega\, d\omega\, d\varphi' ;$$

per cui la precedente relazione si trasformerà nella seguente:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_2(\cos\omega) \operatorname{sen}\omega\, d\omega\, d\varphi' = 0 .$$

Ora è facile dimostrare che si ha

$$P_2(\cos\omega)\operatorname{sen}\omega = -\frac{1}{8}\operatorname{sen}\omega + \frac{3}{8}\operatorname{sen} 3\omega ,$$

e così pure è facile constatare colla diretta integrazione rispetto ad ω che si ha

$$\int_0^{\pi} P_2(\cos\omega)\operatorname{sen}\omega\, d\omega = 0 ;$$

donde consegue pure

$$\int P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0 .$$

La stessa relazione può esser dedotta anche come caso particolare dal teorema fondamentale relativo alle funzioni sferiche espresso dalla relazione

$$\int X_n\, Y_m\, d\sigma = 0 ,$$

dove X_n, Y_m rappresentano due funzioni sferiche qualunque di ordini differenti.

Infatti in omaggio a tal teorema si ha

$$\int P_0(\cos\omega)\, P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0 ,$$

ed essendo

$$P_0(\cos\omega) = 1 ,$$

si avrà pure

$$\int P_2(\cos\omega)\, d\sigma' = 0 .$$

Per dimostrare ora che si ha pure

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2n-2}}\, d\sigma' = 0$$

qualunque sia n superiore ad uno, s' innalzi il primo membro dell' equazione dell' ellissoide alla potenza $n-1$. Con ciò si otterrà l' equazione

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1}=1,$$

cui dovranno soddisfare i punti della superficie del medesimo.

Ora è facile osservare che effettuando l' innalzamento a potenza si otterrà nel primo membro una funzione omogenea di grado $2n-2$ delle coordinate x, y, z; per cui, ponendo

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

per un teorema di Gauss (¹) intorno alle funzioni omogenee, indicando con $\varphi(x, y, z)$ il primo membro, si potrà porre

$$\varphi(x, y, z)=\mathrm{Y}^{(2n-2)}+r^2\,\mathrm{Y}^{(2n-4)}+\cdots+r^{2n-2}\,\mathrm{Y}^{(0)},$$

dove le Y rappresentano funzioni omogenee delle coordinate dei gradi rispettivi

$$2n-2\;,\;2n-4\,,\ldots,0\,,$$

le quali soddisfanno all' equazione

$$\frac{\partial^2 \mathrm{Y}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{Y}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{Y}}{\partial z^2}=0.$$

Se ora si pone

$$x=r\cos\theta\;,\;y=r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi\;,\;z=r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,$$

si ottiene, sempre riferendoci al citato teorema di Gauss,

$$\varphi(x, y, z)=r^{2n-2}\left(\mathrm{X}_{2n-2}+\mathrm{X}_{2n-4}+\cdots+\mathrm{X}_0\right),$$

dove le X rappresentano funzioni sferiche *pure* (denominazione usata da Gauss) degli ordini rappresentati dai rispettivi indici; per cui l' equazione cui devono soddisfare i punti della superficie ellissoidica si potrà anche scrivere:

$$\frac{1}{r^{2n-2}}=\mathrm{X}_{2n-2}+\mathrm{X}_{2n-4}+\cdots+\mathrm{X}_0\,;$$

per cui pel punto di coordinate $\varrho', \theta', \varphi'$ si avrà

$$\frac{1}{\varrho'^{2n-2}}=\mathrm{X}'_{2n-2}+\mathrm{X}'_{2n-4}+\cdots+\mathrm{X}'_0\,,$$

dove coll' apice abbiamo inteso di denotare i valori delle funzioni sferiche degli angoli θ', φ'.

(¹) E. Heine, *Theorie der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen.* Berlin, 1878, vol. I, pag. 324.

Ora in conseguenza della precedente relazione si avrà

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2n-2}}\, d\sigma' = \int (X'_{2n-2} + X'_{2n-4} + \cdots + X'_0)\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma',$$

ed è facile vedere che il secondo membro è nullo pel noto teorema

$$\int X'_m\, P_n(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

se X'_m è una funzione sferica di ordine m, ed è m differente da n.

Così resta adunque pienamente dimostrato anche col secondo metodo che

$$K' = \frac{H}{\sqrt{\Delta f'}}$$

è l'espressione della densità di uno strato ellissoidico equipotenziale.

Con considerazioni analoghe alle precedenti si può ora dedurre, per tutti i valori di ν da 1 fino ad n, la relazione più generale

$$\int \frac{P_{2n}(\cos\omega)}{\varrho'^{2\nu-2}}\, d\sigma' = 0$$

dalla quale si possono facilmente ottenere i teoremi cui ho accennato in principio.

Dall'equazione dell'ellissoide si deduce immediatamente

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2\theta'}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \cos^2\varphi'}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen}^2\varphi'}{c^2};$$

per cui la precedente relazione si potrà anche scrivere

$$\int \left(\frac{\cos^2\theta'}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \cos^2\varphi'}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta' \operatorname{sen}^2\varphi'}{c^2} \right)^{\nu-1} P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0.$$

Se ora in quest'ultima relazione si fanno successivamente infinitamente grandi b e c, a e c, a e b, si ottengono le tre relazioni

$$\int \cos^{2\nu-2}\theta'\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

$$\int \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \cos^{2\nu-2}\varphi'\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

$$\int \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \operatorname{sen}^{2\nu-2}\varphi'\, P_{2n}(\cos\omega)\, d\sigma' = 0,$$

le quali possono esser considerate come generalizzazioni di un teorema di Legendre [1].

[1] E. Heine, op. cit., vol. I, pag. 73.

Tutte le integrazioni che compariscono nel secondo metodo si estendono, come è stato sempre sottinteso, all' intera superficie di raggio uguale ad uno; per cui le precedenti relazioni si possono anche scrivere nel seguente modo:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2\nu-2}\theta' \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi' = 0 \,,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \cos^{2\nu-2}\varphi' \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi' = 0 \,,$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta' \operatorname{sen}^{2\nu-2}\varphi' \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' \, d\varphi' = 0 \,.$$

Mi auguro che i due metodi esposti possano esser applicati in altri casi, e che questi ultimi teoremi possano ottenere per altra via ulteriori generalizzazioni.

Chimica fisica. — *Sui fenomeni di equilibrio fisico nelle miscele di sostanze isomorfe* (¹). Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio Giacomo Ciamician.

Nonostante i molti studî teorici, e le molte ricerche sperimentali eseguite negli ultimi anni intorno alle soluzioni solide, vi sono ancora in questo campo alcuni punti, intorno ai quali rimane una certa oscurità. Merita fra essi uno speciale interesse il caso in cui due sostanze, essendo perfettamente isomorfe o quasi, posseggono la capacità di sciogliersi reciprocamente allo stato solido in tutte le proporzioni.

Le cognizioni intorno ai fenomeni che avvengono nel congelamento delle miscele di tali sostanze ci provengono principalmente da una serie di lavori di F. W. Küster (²). Le conclusioni di tali lavori riguardano specialmente due ordini di fatti: l' andamento del punto di congelamento in funzione della composizione della miscela liquida; ed il rapporto secondo il quale i componenti si distribuiscono fra le due fasi liquida e solida. Riguardo al primo punto Küster enunciò la regola che — se si rappresenta in un sistema di assi coordinati sulle ascisse le concentrazioni e sulle ordinate la temperatura — *la curva dei punti di congelamento coincide colla retta che unisce i punti di congelamento dei due componenti.* Quanto al cofficiente di distribuzione dei componenti fra le due fasi, Küster emise il principio che per sostanze perfettamente isomorfe, la miscela isomorfa che si separa debba avere la stessa composizione della liquida. Anzi da questo comportamento (il quale non sa-

(¹) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(²) Zeitschr. f. Phys. Chemie, V, 601 (1890); VIII, 584 (1891); XII, 508 (1893); XVI, 525 (1895); XVII, 357 (1895).