ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all' Accademia prima del 18 settembre 1898

Matematica. — *Sull' applicabilità di due spazî colla medesima curvatura di Riemann costante.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

Nella celebre Memoria *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Riemann, dopo avere stabilita la nozione di *curvatura* di uno spazio ad n dimensioni relativamente ad un dato punto e ad un' assegnata orientazione di un elemento superficiale attorno al punto, definisce gli spazî a curvatura costante come quelli pei quali la curvatura serba sempre lo stesso valore K_0, cangiando comunque il punto e l' orientazione dell' elemento superficiale attorno ad esso. L' elemento lineare ds di uno spazio a curvatura costante può sempre ridursi, secondo un' asserzione di Riemann, ad una forma tipica determinata e dipendente soltanto dal valore costante K_0 della curvatura, p. e. alla forma canonica:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{\left\{1 + \frac{K_0}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\right\}^2}.$$

Enunciato sotto altra forma, questo teorema ci dice che due spazî dello stesso numero di dimensioni e colla medesima curvatura costante sono applicabili l' uno sull' altro. Ciò vale in particolare di due regioni qualunque del medesimo spazio a curvatura costante, sicchè negli spazî di questa natura vige il principio della *perfetta* trasportabilità delle figure. Di questo teorema fondamentale Lipschitz per il primo diede una dimostrazione nelle sue ricerche sulle forme differenziali quadratiche.

Le pagine seguenti hanno per iscopo di far conoscere pel citato teorema una dimostrazione che sembra nuova e notevole per la sua semplicità [1].

1. *Caso della curvatura nulla.* — Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma differenziale quadratica

$$(1)\qquad \sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

che supponiamo definita positiva, dia il quadrato dell'elemento lineare di uno spazio a curvatura costante K_0, sono espresse, secondo la formola Riemanniana per la curvatura, dalle equazioni seguenti [2]:

$$(2)\qquad (ik\,,jl)_a = K_0\,(a_{ij}\,a_{kl} - a_{il}\,a_{kj})\,,$$

che debbono sussistere per tutti i valori da 1 ad n degli indici $i\,,k\,,j\,,l$, l'apposizione dell'indice a ai simboli a quattro indici $(ik\,,jl)$ di Riemann-Christoffel denotando che essi sono costruiti per la forma (1) coi coefficienti a_{ik}. È utile pel seguito dare alle condizioni (2), coll'introduzione dei simboli di Christoffel a quattro indici di 2^a specie [3], la forma equivalente:

$$(2^*)\qquad \begin{cases} \{ik\,,jl\}_a = 0 & \text{per } k \neq \begin{cases} j \\ l \end{cases} \\ \{il\,,jl\} = K_0\, a_{ij}\,. \end{cases}$$

Comincieremo dal dimostrare il teorema enunciato nel caso $K_0 = 0$, cioè stabiliremo la proprietà che: *Se lo spazio di elemento lineare*

$$(3)\qquad ds^2 = \sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è a curvatura nulla, si può con una trasformazione reale di variabili ridurne l'elemento lineare alla forma tipica

$$(4)\qquad ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2 \ [4].$$

Perchè le due forme differenziali (3), (4) siano equivalenti è necessario, secondo le formole di Christoffel [5], che ciascuna y, considerata come fun-

[1] La dimostrazione che qui pubblico è stata da me data in un corso di lezioni dell'anno 1894-95 all'Università di Pisa e fa parte dei capitoli aggiunti, e non ancora pubblicati, all'edizione tedesca delle mie *Lezioni di geometria differenziale.*

[2] Vedi Lipschitz, Crelle's Journal, 72.

[3] Cf. il cap. II delle mie *Lezioni* ecc.

[4] Nel caso della curvatura nulla, la dimostrazione è in sostanza ben nota, ma qui si riporta per dare una trattazione completa.

[5] *Lezioni*, pag. 42.

zione delle x, soddisfi il sistema delle $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni simultanee:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \, \partial x_k} = \sum_l^{1 \dots n} \left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}_a \frac{\partial y}{\partial x_l} \, .$$

Queste, essendo nel caso attuale nulli tutti i simboli a quattro indici

$$\{ik, jl\}_a ,$$

formano un sistema *illimitatamente integrabile*, talchè per definire una soluzione y del sistema (I) possono assegnarsi ad arbitrio in un punto $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ dello spazio i valori che debbono assumervi la y stessa e le sue n derivate prime. Ora se y_r, y_s sono due soluzioni, distinte o coincidenti del sistema (I) si trova subito che si ha [1]

$$\nabla(y_r, y_s) = \sum_{i,k}^{1 \dots n} \mathrm{A}_{ik} \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} = \text{cost.}$$

e potremo quindi assumere n integrali

$$y_1, y_2, \dots y_n$$

tali che sia

$$\begin{aligned} \nabla(y_r, y_s) &= 0 \qquad \text{per } r \neq s \\ \nabla(y_r, y_r) &= \Delta_1 y_r = 1 \, . \end{aligned}$$

Dopo ciò se trasformiamo la forma differenziale (3) dalle variabili x nelle y, che sono fra loro indipendenti [2] e chiamiamo

$$\sum_{i,k}^{1 \dots n} b_{ik} \, dy_i \, dy_k$$

la forma trasformata, avremo

$$\mathrm{B}_{rs} = 0 \quad \text{per } r \neq s \, , \quad \mathrm{B}_{rr} = 1 \, ,$$

[1] Formando invero la derivata rispetto ad una qualunque x_i del parametro differenziale misto $\nabla(y_r, y_s)$ si trova per le (I)

$$\frac{\partial \nabla(y_r, y_s)}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n) \, .$$

[2] Se fra $y_1, y_2, \dots y_n$ sussistesse una relazione

$$\mathrm{F}(y_1, y_2, \dots y_n) = 0$$

dovremmo avere

$$\Delta_1 \mathrm{F} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_n}\right)^2 = 0 \, ,$$

ciò che è assurdo.

quindi anche

$$b_{rs}=0 \quad \text{per } r \neq s\,, \quad b_{rr}=1$$

e però

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$$

come si voleva.

2. *Forma parabolica dell'elemento lineare di uno spazio pseudosferico.* — Nel caso che la curvatura dello spazio sia una costante K_0 non nulla potremo adoperare un procedimento analogo al precedente, fondandoci sull'osservazione, dovuta a Weingarten [1], che in tal caso il sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni simultanee per una funzione incognita U:

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_k} = \sum_l \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_a \frac{\partial U}{\partial x_l} - K_0\, a_{ik}\, U$$

è completamente integrabile. Invero le condizioni di illimitata integrabilità si riducono appunto alle (2*) che si suppongono soddisfatte [2]. Per definire una soluzione U di questo sistema potremo dunque assegnare ad arbitrio, in un punto dello spazio, i valori che vi assumono U e le sue n derivate prime. Ora se U, V sono due soluzioni di questo sistema si ha identicamente

$$\text{(5)} \qquad \nabla(U\,,V) + K_0\, UV = \text{cost.}\,,$$

come ci accertiamo con calcolo analogo a quello indicato in nota al numero precedente. In particolare si avrà

$$\text{(6)} \qquad \Delta_1 U + K_0\, U^2 = \text{cost.}$$

Ne segue, essendo $\Delta_1 U$ funzione di U, che le ipersuperficie U = cost. sono geodeticamente parallele; di più dimostreremo fra breve che sono esse stesse spazî a $n-1$ dimensioni di curvatura costante.

Supponiamo dapprima che sia K_0 negativa e poniamo

$$K_0 = -\frac{1}{R^2}\,.$$

Disponendo dei valori iniziali di U e delle derivate, potremo rendere nulla la costante del secondo membro nella (6), cioè

$$\text{(7)} \qquad \Delta_1 U = \frac{U^2}{R^2}\,.$$

[1] Crelle's Journal, Bd. 94. Vedi la nota a pag. 197.

[2] Si osservi che coi simboli delle derivate seconde covarianti (*Lezioni*, cap. II), il sistema (II) si scrive

$$U_{ik} = -K_0\, a_{ik}\, U\,,$$

ciò che ne pone in evidenza il carattere invariantivo.

Ciò posto, assumiamo per ipersuperficie coordinate $x_1 = \text{cost.}$ precisamente le $U = \text{cost.}$, sicchè sarà

$$U = f(x_1),$$

e per linee coordinate (x_1) prendiamo le loro traiettorie ortogonali (geodetiche), fissando che il parametro x_1 sia l'arco di queste geodetiche contato a partire da un'ipersuperficie iniziale $U = \text{cost.}$ L'elemento lineare dello spazio assumerà allora la nota forma geodetica

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum_{i,k}^{2\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Scrivendo ora che $U = f(x_1)$ soddisfa, rispetto a quest'ultima forma differenziale, le equazioni (II), coll'osservare che nel caso attuale abbiamo

$$\left\{\begin{array}{l} A_{11} = 1\ ,\ A_{1i} = 0 \quad (i = 2\,, 3\,, \dots n) \\ \left\{ {ik \atop 1} \right\}_a = \left[{ik \atop 1} \right]_a = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial a_{ik}}{\partial x_1}, \end{array}\right.$$

troviamo che si deve avere

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1)}{R^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} = \frac{2}{R^2}\, a_{ik}\, \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \tag{9}$$

Integrando la (8) otteniamo

$$f(x_1) = c\, e^{\frac{x_1}{R}} + c' e^{-\frac{x_1}{R}},$$

dove però, a causa della (7), una delle due costanti c, c' deve essere nulla. Possiamo dunque fare senz'altro

$$f(x_1) = e^{\frac{x_1}{R}},$$

dopo di che le (9) ci danno

$$a_{ik} = e^{\frac{2x_1}{R}} . b_{ik},$$

essendo le b_{ik} funzioni di $x_2, x_3, \dots x_n$ soltanto, ed abbiamo dunque per l'elemento lineare:

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} . \sum_{i,k}^{2\dots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k. \tag{10}$$

Calcoliamo ora per la forma differenziale

$$\sum_{i,k}^{2\dots n} b_{ix}\, dx_i\, dx_k \tag{11}$$

i simboli a quattro indici

$$(rk\,,\, ih)_b\,.$$

Dalla formola ([1])

$$(rk\,,\,ih)_a = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_r\,\partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial x_h\,\partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_r\,\partial x_i}\right) + \tag{12}$$

$$+ \sum_{l,m}^{1\dots n} A_{l,m}\left(\begin{bmatrix} rh \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ri \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} hk \\ l \end{bmatrix}\right),$$

ponendo da sè i termini corrispondenti ai valori 1 degli indici l, m coll' osservare che per la (10)

$$A_{11} = 1\ ,\ A_{1i} = 0 \quad \text{per } i > 1\ ,$$

otteniamo

$$(rk\,,\,ih)_a - e^{\frac{2x_1}{R}}(rk\,,\,ih)_b = \frac{e^{\frac{4x_1}{R}}}{R^2}(b_{rh}\,b_{ik} - l_{ri}\,l_{hk})\,.$$

D' altronde, essendo lo spazio a n dimensioni corrispondente all' elemento lineare (10) di curvatura costante $-\frac{1}{R^2}$, si ha per le (2)

$$(rk\,,\,ih)_a = \frac{e^{\frac{4x_1}{R}}}{R^2}(b_{rh}\,b_{ik} - b_{ri}\,b_{hk}),$$

onde risulta

$$(rk\,,\,ih)_b = 0\,.$$

Gli spazî a $n-1$ dimensioni $x_1 = \text{cost.}$ sono dunque a curvatura nulla e in conseguenza (n. 1) la forma differenziale (11) può ridursi alla forma canonica

$$dy_2^2 + dy_3^2 + \cdots + dy_n^2\,.$$

La (10) diventa quindi

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}}(dy_2^2 + dy_3^2 + \cdots + dy_n^2)\,,$$

che ponendo

$$e^{\frac{x_1}{R}} = \frac{R}{y_1}$$

([1]) *Lezioni*, pag. 49.

può anche scriversi

$$(13)\qquad ds^2 = R^2 \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2}{y_1^2}.$$

Abbiamo così dimostrato il teorema: *L'elemento lineare di ogni spazio a n dimensioni a curvatura costante negativa* $-\frac{1}{R^2}$ *può ridursi alla forma tipica* (13).

Si può osservare che per effettuare tale riduzione basta integrare il sistema completo (II), ciò che equivale, secondo Meyer, ad integrare un sistema canonico di $n+1$ equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine.

3. *Forma ellittica ed iperbolica dell'elemento lineare di uno spazio pseudosferico.* — Se colle considerazioni del numero precedente il teorema concernente l'applicabilità di due spazî colla medesima curvatura costante negativa è già dimostrato, non è fuor di luogo il ricercare quali risultati si ottengono per le forme tipiche dell'elemento lineare di uno spazio pseudosferico, facendo uso di altre soluzioni del sistema (II) per le quali la costante che eguaglia l'espressione

$$\varDelta_1 U - \frac{U^2}{R^2}$$

non sia nulla. Si hanno due casi essenzialmente distinti secondo che questa costante è positiva o negativa e, senza alterare la generalità, potremo fare nel primo caso

$$f(x_1) = \operatorname{senh}\left(\frac{x_1}{R}\right),$$

nel secondo invece

$$f(x_1) = \cosh\left(\frac{x_1}{R}\right).$$

Procedendo come al n. 2, si otterranno rispettivamente per l'elemento lineare dello spazio pseudosferico le forme seguenti:

$$a)\qquad ds^2 = dx_1^2 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \cdot \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

$$b)\qquad ds^2 = dx_1^2 + \cosh^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \cdot \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

in ambedue i casi essendo le b_{ik} funzioni soltanto di $x_2, x_3, \ldots x_n$. Dalla formola (12) del numero precedente si trae ora:

$$(rk, ih)_b = \frac{1}{R^2}(b_{ri}\, b_{hk} - b_{rh}\, b_{ik}) \quad \text{nel caso } a)$$

$$(rk, ih)_b = -\frac{1}{R^2}(b_{ri}\, b_{hk} - b_{rh}\, b_{ik}) \quad \text{nel caso } b),$$

onde vediamo che le ipersuperficie $x_1 = \text{cost.}$ sono spazî a $n-1$ dimensioni di curvatura costante, positiva nel caso a), negativa nel caso b).

Osserviamo di più che nel primo caso le geodetiche (x_1) escono da un medesimo punto a distanza finita dello spazio, dal punto che corrisponde al valore $x_1 = 0$; nel secondo caso poi l'ipersuperficie $x_1 = 0$ è un'ipersuperficie geodetica, ogni geodetica dell'ipersuperficie essendo altresì geodetica dello spazio ambiente, sicchè le geodetiche (x_1) possono allora considerarsi come uscenti da un punto comune *ideale* dello spazio. In fine nella forma tipica (13) del numero precedente le geodetiche (y_1) escono da un punto comune all'infinito, cioè sono parallele nel senso non-euclideo. Le tre forme tipiche trovate possono dirsi così, corrispondentemente al caso $n = 2$ [1], la forma *ellittica*, *iperbolica* e *parabolica* dell'elemento lineare dello spazio pseudosferico.

4. *Caso della curvatura positiva.* — Ci resta da dimostrare il teorema fondamentale nel caso che la curvatura sia una costante positiva

$$K_0 = \frac{1}{R^2},$$

ciò che faremo ammettendo vero il teorema per gli spazî di curvatura costante positiva a $n-1$ dimensioni e dimostrando che esso sussisterà anche per gli spazî ad n dimensioni. Così, ricordando che per $n = 2$ il teorema sussiste [2], l'avremo stabilito in generale.

Con processo analogo a quello dei numeri precedenti si darà all'elemento lineare dello spazio a n dimensioni colla curvatura costante $K_0 = \frac{1}{R^2}$ la forma

$$ds^2 = dx_1^2 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x_1}{R}\right) \cdot \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{14}$$

(1) *Lezioni*, pag. 183.
(2) *Lezioni*, pag. 180.

essendo anche qui le b funzioni di $x_2, x_3, \ldots x_n$. Calcolando per la forma differenziale

$$(15) \qquad \sum_{i,k}^{2\ldots n} b_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

i simboli a quattro indici, troviamo

$$(rk\,,ih)_b = \frac{1}{R^2}(b_{ri}\, b_{hk} - b_{rh}\, b_{ik})\,.$$

La forma (15) appartiene dunque, come quadrato dell'elemento lineare, ad uno spazio ad $n-1$ dimensioni di curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$ e può quindi, per ipotesi, identificarsi con una forma tipica determinata. Lo stesso accade dunque della forma differenziale (14) c. d. d.

È chiaro che, applicando successivamente il nostro processo di riduzione, ridurremo l'elemento lineare dello spazio a n dimensioni colla curvatura costante positiva alla seguente forma tipica:

$$ds^2 = R^2 \{dy_1^2 + \text{sen}^2 y_1\, dy_2^2 + \text{sen}^2 y_1\, \text{sen}^2 y^2\, dy_3^2 + \cdots + \text{sen}^2 y_1\, \text{sen}^2 y_2 \ldots \text{sen}^2 y_{n-1}\, dy_n^2\}\,.$$

Fisica terrestre. — *I terremoti nell'isola di Labuan (Borneo) del 21 settembre 1897.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio Tacchini.

Intorno alle $20^h \frac{1}{2}$ del 20 ed alle $6^h \frac{1}{2}$ (t. m. E. C.) del 21 settembre, i più delicati strumenti di alcuni Osservatorî italiani ed anche esteri cominciarono ad essere agitati a causa di lontana commozione sismica, e la perturbazione fu di lunghissima durata.

Si seppe più tardi che circa le stesse ore fu perturbato lievemente anche il magnetografo di Batavia nell'isola di Giava [1]. Essendosi subito scritto dall'Ufficio Centr. di Met. e Geod. di Roma all'Osservatorio magnetico e meteorologico di Batavia, si ebbero i particolari delle indicazioni fornite da quelli strumenti magnetici a registrazione fotografica e si apprese che le perturbazioni in parola erano probabilmente dovute alla comparsa d'una nuova isola vulcanica presso Labuan sulla costa NW di Borneo. La prima perturbazione, durata circa 20 minuti, cominciò alle $2^h 24^m$ ant. (t. m. civile) del 21 settembre sul fotogramma della forza magnetica orizzontale e si manifestò anche più sensibilmente sul fotogramma dell'elettrometro

[1] Giornale inglese *Nature*, n. 1473, 20 genn. 1898, pag. 272-273.