ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Fisica matematica. — *Sulla temperatura di un conduttore lineare bimetallico.* Nota II di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio BLASERNA.

In una mia Nota precedente [1] ho dimostrato come si possa dedurre lo stato termico stazionario di un conduttore lineare bimetallico nel caso in cui si tenga conto degli effetti Peltier e Thomson ed in cui si considerino i coefficienti k, h, ω, σ e c quali funzioni lineari della temperatura. Ho inoltre considerato il caso più semplice in cui si possa trascurare l'effetto Thomson e riguardare le quantità k, h, ω e c quali costanti. Nella presente Nota tratterò per i due stessi casi il problema dello stato variabile della temperatura.

Le equazioni differenziali erano nel caso più generale:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+2j_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-(m_1^2-n_1\delta_1)u_1+n_1=g_1\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(u_1^2)}{\partial x_1^2}-j_1\varepsilon_1\frac{\partial(u_1^2)}{\partial x_1}$$
$$+m_1^2\beta_1u_1^2+\frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(u_1^2)}{\partial t}, \qquad (\mathrm{I}_1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+2j_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-(m_2^2-n_2\delta_2)u_1+n_2=g_2\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial^2(u_2^2)}{\partial x_2^2}-j_2\varepsilon_2\frac{\partial(u_2^2)}{\partial x_2}$$
$$+m_2^2\beta_2u_2^2+\frac{g_2\eta_2}{2}\frac{\partial(u_2^2)}{\partial t}, \qquad (\mathrm{I}_2)$$

ove per abbreviare si pose:

$$2j_1=\frac{i\sigma_{10}}{qk_{10}} \qquad 2j_2=\frac{i\sigma_{20}}{qk_{20}}$$
$$m_1^2=\frac{ph_{10}}{qk_{10}} \qquad m_2^2=\frac{ph_{20}}{qk_{20}}$$
$$n_1=\frac{i_2\omega_{10}}{\mathrm{J}q^2k_{10}} \qquad n_2=\frac{i^2\omega_{20}}{\mathrm{J}q^2k_{20}}$$
$$g_1=\frac{\varrho c_{10}}{k_{10}} \qquad g_2=\frac{\varrho c_{20}}{k_{20}}$$

Si avranno così le seguenti condizioni:

(1_1) $\quad x_1=0$, $u_1=0$ per ogni t; $\quad x_2=l_2$, $u_2=0$ per ogni t; $\quad (1_2)$

(2) $\quad (u_1)_{l_1}=(u_2)_0$ per ogni t;

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. VII, pag. 346.

$$(3)\quad \frac{i}{q}\,\mathrm{P} = k_{10}\left\{(1+\alpha_1 u_1)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right\}_{l_1} - k_{20}\left\{(1+\alpha_2 u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right\}_0 \ \text{per ogni } t\,;$$

$$(4)\qquad t=0 \quad u_1 = u_2 = 0 \ \text{per ogni } x_1 \text{ ed } x_2\,.$$

Risolviamo per approssimazioni successive le equazioni (I_1) e (I_2). Poniamo: $u_1 = \mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1$, $u_2 = \mathrm{U}_2 + \mathrm{V}_2$ intendendo con U_1 ed U_2 di esprimere lo stato stazionario precedentemente determinato. Le equazioni differenziali divengono:

$$(\mathrm{I}'_1)\ \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{U}_1}{dx^2_1} + 2j_1\dfrac{d\mathrm{U}_1}{dx_1} - (m_1{}^2 - n_1\delta_1)\mathrm{U}_1 + n_1 + \dfrac{\alpha_1}{2}\dfrac{d^2(\mathrm{U}_1{}^2)}{dx_1{}^2} + j_1\varepsilon_1\dfrac{d(\mathrm{U}_1{}^2)}{dx_1} - \\ -m_1{}^2\beta_1\mathrm{U}^2 = g_1\dfrac{\partial\mathrm{V}_1}{\partial t} + \dfrac{g_1\eta_1}{2}\dfrac{\partial(\mathrm{V}_1{}^2)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2\mathrm{V}_1}{\partial x_1{}^2} - 2j_1\dfrac{\partial\mathrm{V}_1}{\partial x_1} + (m_1{}^2 - n_1\delta_1)\mathrm{V}_1 - \\ -\dfrac{\alpha_1}{2}\dfrac{\partial^2(\mathrm{V}_1{}^2)}{\partial x_1{}^2} - \alpha_1\dfrac{\partial^2(\mathrm{U}_1\mathrm{V}_1)}{\partial x_1{}^2} - j_1\varepsilon_1\dfrac{\partial(\mathrm{V}_1{}^2)}{\partial x_1} - 2j_1\varepsilon_1\dfrac{\partial(\mathrm{U}_1\mathrm{V}_1)}{\partial x_1} + m_1{}^2\beta_1\mathrm{V}_1{}^2 \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}'_2)\ \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{U}_2}{dx_2{}^2} + 2j_2\dfrac{d\mathrm{U}_2}{dx_2} - (m_2{}^2 - n_2\delta_2)\mathrm{U}_2 + n_2 + \dfrac{\alpha_2}{2}\dfrac{d^2(\mathrm{U}_2{}^2)}{dx_2{}^2} + j_2\varepsilon_2\dfrac{d(\mathrm{U}_2{}^2)}{dx_2} - \\ -m_2{}^2\beta_2\mathrm{U}_2{}^2 = g_2\dfrac{\partial\mathrm{V}_2}{\partial t} + \dfrac{g_2\eta_2}{2}\dfrac{\partial(\mathrm{V}_2{}^2)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2\mathrm{V}_2}{\partial x_2{}^2} - 2j_2\dfrac{\partial\mathrm{V}_2}{\partial x_2} + (m_2{}^2 - n_2\delta_2)\mathrm{V}_2 - \\ -\dfrac{\alpha_2}{2}\dfrac{\partial^2(\mathrm{V}_2{}^2)}{\partial x_2{}^2} - \alpha_2\dfrac{\partial^2(\mathrm{U}_2\mathrm{V}_2)}{\partial x_2{}^2} - j_2\varepsilon_2\dfrac{\partial(\mathrm{V}_2{}^2)}{\partial x_2} - 2j_2\varepsilon_2\dfrac{\partial(\mathrm{U}_2\mathrm{V}_2)}{\partial x_2} + m_2{}^2\beta_2\mathrm{V}_2{}^2. \end{cases}$$

Osserviamo che le quantità U_1 ed U_2 per definizione soddisfano rispettivamente con sufficiente approssimazione alle equazioni che si formerebbero uguagliando a zero le parti delle (I'_1) e (I'_2) che precedono i segni di eguaglianza. Infatti queste due equazioni non sarebbero altro che le equazioni dello stato stazionario.

Ci rimangono quindi solo a determinare le parti variabili V_1 e V_2 in modo che siano soddisfatte le due seguenti equazioni:

$$(\mathrm{I}''_1)\quad g_1\frac{\partial\mathrm{V}_1}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathrm{V}_1}{\partial x_2{}^1} - 2j_2\frac{\partial\mathrm{V}_1}{\partial x_1} + (m_1{}^2 - n_1\delta_1)\mathrm{V}_1 = -\frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(\mathrm{V}_1{}^2)}{\partial t} + $$
$$+\frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{V}_1{}^2)}{\partial x_1{}^2} + \alpha_1\frac{\partial^2(\mathrm{U}_1\mathrm{V}_1)}{\partial x_1{}^2} + j_1\varepsilon_1\frac{\partial(\mathrm{V}_1{}^2)}{\partial x_1} + 2j_1\varepsilon_1\frac{\partial(\mathrm{U}_1\mathrm{V}_1)}{\partial x_1} + m_1{}^2\beta_1\mathrm{V}_1{}^2\,,$$

$$(\mathrm{I}''_2)\quad g_2\frac{\partial\mathrm{V}_2}{\partial t} - \frac{\partial^2\mathrm{V}_2}{\partial x_2{}^2} - 2j_2\frac{\partial\mathrm{V}_2}{\partial x_2} + (m_2{}^2 - n_2\delta_2)\mathrm{V}_2 = -\frac{g_2\eta_2}{2}\frac{\partial(\mathrm{V}_2{}^2)}{\partial t} + $$
$$+\frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{V}_1{}^2)}{\partial x_1{}^2} + \alpha_2\frac{\partial^2(\mathrm{U}_2\mathrm{V}_2)}{\partial x_2{}^2} + j_2\varepsilon_2\frac{\partial(\mathrm{V}_2{}^2)}{\partial x_2} + 2j_1\varepsilon_2\frac{\partial(\mathrm{U}_1\mathrm{V}_1)}{\partial x_1} + m_2\beta_2\mathrm{V}_2{}^2\,.$$

Le condizioni limiti poi sono evidentemente le seguenti:

$(1'_1)$ $\quad x_1 = 0 \quad \mathrm{V}_1 = 0$ per ogni t; $\qquad x_2 = l_2 \quad \mathrm{V}_2 = 0$ per ogni t $\quad (1'_2)$

$(2')$ $\qquad (\mathrm{V}_1)_{l_1} = (\mathrm{V}_2)_0$ per ogni t

$$(3')\quad 0 = k_{10}\Big\{\Big[1+\alpha_1(\mathrm{V}_1+\mathrm{U}_1)\Big]\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_1}+\alpha_1 \mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x_1}\Big\}_{l_1} - k_{20}\Big\{\Big[1+\alpha_2(\mathrm{V}_2+\mathrm{U}_2)\Big]\frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial x_2}+\alpha_2 \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial x_2}\Big\}_0$$

$$(4')\qquad t=0 \quad \mathrm{V}_1 = -\mathrm{U}_1 \;,\quad \mathrm{V}_2 = -\mathrm{U}_2 \text{ per ogni } x_1 \text{ ed } x_2 .$$

Le equazioni ($1''_1$) e (I''_2) si possono risolvere per successive approssimazioni in modo analogo a quello impiegato per le equazioni dello stato stazionario.

Si cercheranno dapprima soluzioni particolari delle equazioni:

$$(1_{\text{bis}})\qquad \begin{aligned} g_1 \frac{\partial \mathrm{V}'_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_1}{\partial x_1^2} + 2j_1 \frac{\partial \mathrm{V}'_1}{\partial x_1} - (m_1^2 - n_1\delta_1)\,\mathrm{V}'_1 \\ g_2 \frac{\partial \mathrm{V}'_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mathrm{V}'_2}{\partial x_2^2} + 2j_2 \frac{\partial \mathrm{V}'_2}{\partial x_2} - (m_2^2 - n_2\delta_2)\,\mathrm{V}'_2 \end{aligned}$$

che soddisfino alle condizioni ($1'_1$), ($1'_2$), ($2'$) e ($3'$). Si formeranno i sistemi di equazioni successive:

$$g_1 \frac{\partial \mathrm{V}''_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathrm{V}''_1}{\partial x_1^2} - 2j_1 \frac{\partial \mathrm{V}''_1}{\partial x_1} + (m_1 - n_1\delta_1)\,\mathrm{V}''_1 = -\frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(\mathrm{V}'^2_1)}{\partial t} + \frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{V}'^2_1)}{\partial x_1^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2(\mathrm{U}_1\mathrm{V}'_1)}{\partial x_1^2} + j_1\varepsilon_1 \frac{\partial(\mathrm{V}'^2_1)}{\partial x_1} + 2j_1\varepsilon_1 \frac{\partial(\mathrm{U}_1\mathrm{V}'_1)}{\partial x_1} + m_1^2\beta_1\mathrm{V}'^2_1 .$$

$$g_1 \frac{\partial \mathrm{V}'''_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathrm{V}'''_1}{\partial x_1^2} - 2j_1 \frac{\partial \mathrm{V}'''_1}{\partial x_1} + (m_1 - n_1\delta_1)\,\mathrm{V}'''_1 = -\frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(\mathrm{V}''^2_1)}{\partial t} + \frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{V}''^2_1)}{\partial x_1^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2(\mathrm{U}_1\mathrm{V}''_1)}{\partial x_1^2} + j_1\varepsilon_1 \frac{\partial(\mathrm{V}''^2_1)}{\partial x_1} + 2j_1\varepsilon_1 \frac{\partial(\mathrm{U}_1\mathrm{V}''_1)}{\partial x_1} + m_1^2\beta_1\mathrm{V}''^2_1 .$$

. . . .

. . . .

$$g_2 \frac{\partial \mathrm{V}''_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathrm{V}''_2}{\partial x_2^2} - 2j_2 \frac{\partial \mathrm{V}''_2}{\partial x_2} + (m_2 - n_2\delta_2)\,\mathrm{V}''_2 = -\frac{g_1\eta_1}{2}\frac{\partial(\mathrm{V}'^2_2)}{\partial t} + \frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{V}'^2_2)}{\partial x_2^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2(\mathrm{U}_2\mathrm{V}'_2)}{\partial x_2^2} + j_2\varepsilon_2 \frac{\partial(\mathrm{V}'^2_2)}{\partial x_2} + 2j_2\varepsilon_2 \frac{\partial(\mathrm{U}_2\mathrm{V}'_2)}{\partial x_2} + m_2^2\beta_2\mathrm{V}'^2_2 .$$

$$g_2 \frac{\partial \mathrm{V}'''_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathrm{V}'''_2}{\partial x_2^2} - 2j_1 \frac{\partial \mathrm{V}'''_2}{\partial x_2} + (m_2 - n_2\delta_2)\,\mathrm{V}'''_2 = -\frac{g_2\eta_2}{2}\frac{\partial(\mathrm{V}''^2_2)}{\partial t} + \frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial^2(\mathrm{V}''^2_2)}{\partial x_2^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2(\mathrm{U}_2\mathrm{V}''_2)}{\partial x_2^2} + j_2\varepsilon_2 \frac{\partial(\mathrm{V}''^2_2)}{\partial x_2} + 2j_2\varepsilon_2 \frac{\partial(\mathrm{U}_2\mathrm{V}''_2)}{\partial x_2} + m_2^2\beta_2\mathrm{V}''^2_2 .$$

. . . .

. . . .

Da questi sistemi si dedurranno coll'approssimazione che si vorrà le soluzioni particolari $\mathrm{V}_1^{(m)}$ e $\mathrm{V}_2^{(m)}$ che soddisfino alle condizioni ($1'_1$), ($1'_2$), ($2'$) e ($3'$).

Mediante queste soluzioni particolari si dovrà cercare di formare le soluzioni generali V_1 e V_2 soddisfacenti alle condizioni iniziali ($4'$). Volendo eseguire il calcolo accennato si incontreranno le due seguenti difficoltà: 1° Si dovrà determinare le costanti di ogni soluzione particolare $V_1^{(n)}$ e $V_2^{(n)}$ in modo che siano soddisfatte le condizioni $(1_1')$, $(1_2')$, $(2')$ e $(3')$, mentre le due ultime di esse, speciali di alcuni fenomeni che avvengono nei corpi eterogenei, furono fino ad ora solo considerate in generale nella deduzione della forma stazionaria dei detti fenomeni [1]. 2° Si dovrà colle soluzioni approssimate particolari $V_1^{(n)}$ e $V_2^{(n)}$ dedurre le soluzioni generali V_1 e V_2 che soddisfino alle condizioni iniziali, cosa che in generale non si saprà eseguire.

Osserviamo però che l'aver assunti i coefficienti k, h, w, c, e σ come funzioni della temperatura, invece che costanti, modifica assai i risultati esprimenti lo stato termico stazionario e quindi anche quelli esprimenti lo stato variabile, in quanto che lo stato a cui esso tende col crescere del tempo si trova modificato. Però il modo con cui questo stato variabile tende al suo stato finale, è pochissimo modificato, come si potrà facilmente vedere, sia col calcolo, che coll'esperienza; basterà quindi per avere una soluzione fisicamente abbastanza esatta arrestarsi al primo grado di approssimazione tanto nella determinazione delle soluzioni particolari, quanto in quella delle soluzioni generali. Si potrà però sempre usare le equazioni che abbiamo stabilite per determinare delle correzioni; ma per ciò basteranno i metodi ordinarî.

Il problema si trova quindi ridotto alla ricerca di soluzioni particolari delle equazioni (I_{bis}), che soddisfacciano alle condizioni $(1'_1)$, $(1'_2)$, $(2')$, e $(3')$; ed alla formazione della soluzione generale soddisfacente alla condizione $(4')$.

Soluzioni particolari delle (I_{bis}), sono le seguenti:

$$V_1' = e^{-j_1 x_1}\left[A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\mu_1^2 - j_1^2}\, x_1 + B_1 \cos \sqrt{\mu_1^2 - j_1^2}\, x_1 \right] e^{-\left(\frac{\mu_1^2}{g_1} + \frac{m_1^2 - n_1 \delta_1}{g_1}\right) t}$$

$$V_2' = e^{-j_2 x_2}\left[A_2 \operatorname{sen} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 + B_2 \cos \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 \right] e^{-\left(\frac{\mu_2^2}{g_2} + \frac{m_2^2 - n_2 \delta_2}{g_2}\right) t}$$

in cui A_1, A_2, B_1, B_2, μ_1 e μ_2 indicano costanti arbitrarie.

Le condizioni $(1'_1)$ e $(1'_2)$ esigono che siano:

$$B_1 = 0 \;, \quad B_2 = -A_2 \operatorname{tang} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\,.$$

Ora bisogna disporre delle rimanenti costanti in modo da soddisfare alle condizioni $(2')$, $(3')$ e $(4')$.

Per questo farò uso di un caso speciale di un metodo di determinazione delle costanti degli integrali particolari di una classe di equazioni alle derivate parziali; il quale metodo credo assai utile nello studio di alcuni fenomeni, che avvengono in corpi eterogenei e spero di poter presto pubblicare in forma più generale.

[1] Vedi p. e. *La théorie mathématique de la chaleur* di Poisson.

Siccome però, in causa del grande numero di coefficienti che abbiamo voluto considerare, i calcoli sarebbero troppo complicati per poter interessare, mi limiterò ad indicare esattamente la via da seguire, riserbandomi di dare i risultati completi quando applicherò le formole a casi pratici.

Soluzioni particolari delle (I_{bis}) soddisfacenti alle ($1'_1$) e ($2'_2$) sono:

$$V_1' = e^{-j_1 x_1} A_1 \operatorname{sen} \sqrt{\mu_1^2 - j_1^2}\, x_1 \,.\, e^{-\left(\frac{\mu_1^2}{g_1} + \frac{m_1^2 - n_1 \delta_1}{g_1}\right)t}$$

$$V_2' = e^{-j_2 x_2} A_2 \left(\operatorname{sen} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 - \operatorname{tang} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, l_2 \,.\, \cos \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 \right) .$$
$$. \, e^{-\left(\frac{\mu_2^2}{g_1} + \frac{m_2^2 - n_2 \delta_2}{g_1}\right)} .$$

In esse μ_1, μ_2 A_1 ed A_2 sono costanti arbitrarie. Potendone quindi disporre, definiamo una quantità z^2 come radice di una certa equazione trascendente da stabilirsi e poniamo inoltre:

$$(a) \qquad z^2 = \frac{\mu_1^2}{g_1} + \frac{m_1^2 - a_1 \delta_1}{g_1} = \frac{\mu_2^2}{g_2} + \frac{m_2^2 - n_2 \delta_2}{g_2} .$$

Se questo sarà, come vedremo, possibile, la quantità z^2 avrà un' infinità di determinazioni, che indicheremo con z^2_ν; le corrispondenti μ diverranno rispettivamente $\mu_{1\nu}$ e $\mu_{2\nu}$.

Le soluzioni generali potranno quindi rappresentarsi colle seguenti formole:

$$V_1 = e^{-j_1 x_1} . \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu e^{-z_\nu^2 t} . A_{1\nu} \operatorname{sen} \sqrt{\mu^2_{1\nu} - j_1^2}\; x_1$$

$$V_2 = e^{-j_2 x_2} . \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu e^{-z_\nu^2 t} . A_{2\nu} \left(\operatorname{sen} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\, x_2 - \operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\, l_2 . \cos \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\, x_2 \right) .$$

Essendo z^2_ν e M_ν indipendenti dall' indice *uno* o *due* per definizione, le condizioni (2′) e (3′) diverranno approssimativamente:

$$e^{-j_1 x_1} A_{1\nu} \operatorname{sen} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j^2_1}\, l_1 = - e^{-j_1 x_1} A_{2\nu} \operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}\; l_2$$

$$(b) \qquad A_{\nu 1} k_1 e^{-j_1 l_1} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2} \cos \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}\, l_1 - A_{1\nu} k_1 j_1 e^{-j_1 l_1} \operatorname{sen} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}\, l =$$
$$= A_{2\nu} k_2 \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2} + A_{2\nu} k_2 j_2 \operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2}\; l_2 .$$

Coll' aiuto della prima di queste due equazioni eliminiamo $A_{2\nu}$ dalla seconda; essa, divisi i due membri per $A_{1\nu}$, ci darà la seguente equazione trascendente:

$$k_1 e^{-j_1 l_1} \left[\frac{\sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}}{\operatorname{tang} \sqrt{\mu_{1\nu}^2 - j_1^2}\, l_1} - j_1 \right] = - k_2 \left[\frac{\sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j_2^2}}{\operatorname{tang} \sqrt{\mu_{2\nu}^2 - j^2_2}\, l_1} - j_2 \right] .$$

Esprimiamo quest' ultima in funzione della sola radice z_ν^2, facendo uso delle due equazioni (a); avremo così stabilita l' equazione trascendente, che volevamo.

Deduciamo le radici z^2_ν; per mezzo di esse determiniamo le corrispondenti $\mu_{1\nu}$ e $\mu_{2\nu}$. Ci rimane ora a determinare le costanti $A_{1\nu}$ e M_ν, che sono tuttora arbitrarie in modo che siano soddisfatte le condizioni per $t=0$. Si avrà:

$$-S_1 e^{-j_1 x_1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu A_{1\nu} \operatorname{sen} \sqrt{\mu^2_1 - j^2_1}\, x_1$$

$$-S_1 e^{-j_2 x_2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu A_{1\nu} \left(\operatorname{sen} \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 - \operatorname{tang} \sqrt{\mu_2^2 - j^2_2}\, l_2 . \cos \sqrt{\mu_2^2 - j_2^2}\, x_2 \right).$$

Ricordiamo che U. Dini ha mostrato come si possa sviluppare una funzione data arbitrariamente in un certo intervallo, secondo la serie:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \operatorname{sen} \lambda_n x),$$

quando le quantità λ_n sono radici reali di una equazione della forma:

$$F_2(z) + F_1(z) \operatorname{sen} \pi z + F(z) \cos \pi z = 0,$$

in cui le funzioni F_2, F_1 e F devono soddisfare ad alcune condizioni generali [1].

Ora basterà che noi formiamo due equazioni della forma voluta dalla teoria di Dini e che ammettono rispettivamente per radici le quantità:

$$\sqrt{\mu^2_{1\nu} - j_1^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\mu^2_{2\nu} - j_2^2};$$

ciò potendosi sempre eseguire con sufficiente approssimazione, si potrà determinare coll' elegante metodo di Dini i coefficienti dello sviluppo; i quali per noi saranno le quantità:

$$M_\nu A_{1\nu} \quad \text{ed} \quad M_\nu A_{2\nu}.$$

Si avranno così per ogni ν due equazioni, che unite alla prima delle equazioni (b) ci daranno tutti i coefficienti voluti.

Il problema, prescindendo dalla complicazione del calcolo può ritenersi completamente risolto.

Caso speciale. — Consideriamo ora in modo analogo che per lo stato stazionario il caso speciale in cui nel conduttore intervengano così piccole differenze di temperatura che i coefficienti k, h, e ω possano essere con-

[1] Vedi U. Dini, *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale.*

siderati come costanti e che l'effetto Thomson sia nullo. Le equazioni differenziali delle temperature u_1 ed u_2 e le relative condizioni saranno le seguenti:

$$(5_1)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{k_1}{c_1\varrho_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}-\frac{h_1 p}{c_1\varrho_1 q}u_1+i^2\frac{\omega_1}{\mathrm{I}c_1\varrho_1 q^2};$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\frac{k_2}{c_2\varrho_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}-\frac{h_2 p}{c_2\varrho_2 p}u_2+i^2\frac{\omega_2}{\mathrm{I}c_2\varrho_2 q^2}\qquad(5_2)$$

$$(6_1)\qquad x_1=0\ ,\ u_1=0 \text{ per ogni } t\,;\qquad x_2=l_2\ ,\ u_2=0 \text{ per ogni } t\,;\qquad(6_2)$$

$$(7)\qquad (u_1)_{l_1}=(u_2)_0 \text{ per ogni } t\,;$$

$$(8)\qquad \mathrm{P}\frac{i}{q}=k_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)_{l_1}-k_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)_0 \text{ per ogni } t\,;$$

$$(9)\qquad t=0\qquad u_1=u_2=0 \text{ per ogni } x_1 \text{ ed } x_2\,.$$

Posiamo $u_1=\mathrm{U}_1+\mathrm{V}_1$; $u_2=\mathrm{U}_2+\mathrm{V}_2$ intendendo di rappresentare con U_1 ed U_2 lo stato stazionario noto; le equazioni (5_1) e (5_2) si divideranno ciascuna in due parti, di cui le prime saranno rispettivamente le equazioni dello stato stazionario già integrate e le seconde saranno:

$$(5'_1)\qquad \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial t}=\frac{\partial^2\mathrm{V}_1}{\partial x_2^1}\frac{k_1}{c_1\varrho_1}-\mathrm{V}_1\frac{h_1 p}{c_1\varrho_1 q}\ ;\qquad \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial t}=\frac{\partial^2\mathrm{V}_2}{\partial x_2^2}\frac{k_2}{c_2\varrho_2}-\mathrm{V}_2\frac{h_2 p}{c_2\varrho_2 q}\ ;\qquad(5'_2)$$

alle quali corrisponderanno le condizioni:

$$(6'_1)\qquad x_1=0\ ,\ \mathrm{V}_1=0 \text{ per ogni } t\,,\qquad x_2=l_2\ ,\ \mathrm{V}_2=0 \text{ per ogni } t\qquad(6'_2)$$

$$(7')\qquad (\mathrm{V}_1)_{l_1}=(\mathrm{V}_2)_0 \text{ per ogni } t$$

$$(8')\qquad 0=k_1\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x_1}\right)_{l_1}-k_2\left(\frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial x_2}\right)_0 \text{ per ogni } t$$

$$(9')\qquad t=0\ ,\ \mathrm{V}_1=-\mathrm{U}_1 \text{ per ogni } x_1\ ,\ \mathrm{V}_2=-\mathrm{U}_2 \text{ per ogni } x_2\,.$$

Soluzioni particolari delle $(5'_1)$ e $(5'_2)$ sono rispettivamente:

$$\mathrm{V}_1=[\mathrm{A}_1 \operatorname{sen} m_1x_1+\mathrm{B}_1\cos m_1x_1]\,e^{-\frac{k_1}{c_1\varrho_1}(m_1^2+\lambda_1^2)\,t}\,,$$

$$\mathrm{V}_2=[\mathrm{A}_2 \operatorname{sen} m_2x_2+\mathrm{B}_2\cos m_2x_2]\,e^{-\frac{k_2}{c_2\varrho_2}(m_2^2+\lambda_2^2)\,t}\,,$$

in cui A_1, B_1, A_2, B_2, m_1 ed m_2 indicano costanti arbitrarie ed in cui si pose:

$$\lambda_1=\sqrt{\frac{h_1 p}{k_1 q}}\ ,\qquad \lambda_2=\sqrt{\frac{h_2 p}{k_2 q}}\,.$$

Posiamo:

$$\frac{k_1}{c_1\varrho_1}(m_1^2+\lambda_1^2)=\frac{k_2}{c_2\varrho_2}(m_2^2+\lambda_2^2)=z^2\,,$$

intendendo di rappresentare con z^2 le radici di un' equazione trascendente da stabilirsi.

Le condizioni $(6_1')$ e $(6_2')$ esigono che siano:

$$B_1=0\ ,\quad B_2=-A_2\ \mathrm{tang}\ m_2 l_2$$

Le soluzioni generali saranno quindi:

$$V_1=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\, e^{-z_\nu^2 t}\, A_{1\nu}\ \mathrm{sen}\ m_{1\nu}\, x_1$$

$$V_2=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\, e^{-z_\nu^2 t}\, A_{2\nu}\,(\mathrm{sen}\ m_{2\nu}\, x_2-\mathrm{tang}\ m_{2\nu}\, l_2\,.\cos m_{2\nu}\, x_2)\,.$$

Le condizioni (7′) ed (8′) diverranno quindi:

$$A_{1\nu}\ \mathrm{sen}\ m_{1\nu}\, l_1=-A_{2\nu}\ \mathrm{tang}\ m_{2\nu}\, l_2$$
$$k_1 A_{1\nu}\, m_{1\nu}\cos m_{1\nu}\, l_1=k_2 A_{2\nu}\, m_{2\nu}\,.$$

Da esse si dedurrà una relazione fra $A_{1\nu}$ ed $A_{2\nu}$ e l'equazione trascendente in z^2:

$$\frac{\mathrm{tang}\sqrt{z^2-\lambda_1^2}\, l_2}{\sqrt{z^2-\lambda_1^2}}=-\frac{\mathrm{tang}\sqrt{z^2-\lambda_2^2}\, l_2}{\sqrt{z^2-\lambda_2^2}}\,,$$

dalle cui radici si determineranno $m_{1\nu}$ e $m_{2\nu}$.

Si dovrà infine, procedendo come è stato detto per il caso generale, soddisfare alle condizioni (9′), le quali divengono:

$$-S_1=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\, A_{1\nu}\ \mathrm{sen}\ m_{1\nu}\, x_1$$

$$-S_2=\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\, A_{2\nu}\,(\mathrm{sen}\ m_{2\nu}\, x_2-\mathrm{tang}\ m_{2\nu}\, l_2\cos m_{2\nu}\, x_2)\,.$$

Ma qui il calcolo non può più proseguirsi che numericamente.