ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 novembre 1898.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Come i tubi scemano la virtù scaricatrice dei raggi X.* Nota del Socio Emilio Villari.

Fisica. — *Su una Nota del prof. de Heen dell' Università di Liegi dal titolo « Quelques observations sur le radiations infra-électriques et sur les expériences de M. E. Villari ».* Osservazioni del Socio Emilio Villari.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui sistemi di ipersuperficie di S_r aventi le stesse prime polari.* Nota 1ª del Corrispondente E. Bertini.

In una Nota pubblicata negli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino (1897) determinai tutti i sistemi di curve piane che hanno le stesse prime polari. Qui estendo la questione alle ipersuperficie (d' ordine n) V^n_{r-1} di uno spazio a qualunque numero r di dimensioni S_r: e in questa Nota 1ª dimostro alcune proprietà generali: cioè che una delle dette V^n_{r-1} è caratterizzata dall' ammettere un certo sistema di quadriche apolari; che tutte le V^n_{r-1}, rispetto a cui è apolare un cosifatto sistema, in un caso formano un solo sistema lineare, che dico $\varDelta$, costituito appunto di V^n_{r-1} aventi le medesime prime polari, mentre in ogni altro caso si distribuiscono in infiniti sistemi $\varDelta$;

che tutte le V^n_{r-1} di un sistema $\varDelta$ si ottengono da una di esse per le trasformazioni omografiche di un gruppo coi medesimi spazî fondamentali, ecc. In una 2ª Nota darò le formole per $r=3$, avendo già date quelle per $r=1, 2$ nella succitata Nota dell'Accad. di Torino. I casi possibili sono 13 e si hanno corrispondentemente 13 tipi di sistemi $\varDelta$, dei quali cinque ∞^3, quattro ∞^2 e quattro ∞^1.

1. *La corrispondenza fra i poli e le prime polari rispetto ad una* V^n_{r-1} *non è biunivoca nel solo caso che* V^n_{r-1} *sia un cono, cioè possegga un* S_{h-1} n^{uplo} $(h=1, 2, \ldots r)$. Infatti la prima polare di un punto n^{uplo} è indeterminata. Che se due punti $(x_0 = x_1 = \cdots = x_r = 0\,,\ x_0 = x_1 = \cdots = x_{r-1} = x_{r+1} = 0)$ hanno, rispetto ad una V^n_{r-1}, di equazione $f=0$, la stessa prima polare, deve essere $\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_{r+1}} = \mu \dfrac{\partial f}{\partial x_r}$ cioè $\mu \dfrac{\partial f}{\partial x_r} - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_{r+1}} = 0$, onde è indeterminata la prima polare del punto $(0\, 0 \ldots 0\ \mu - \lambda)$ e però ecc.

Le V^n_{r-1} che sono coni hanno le medesime prime polari, cioè tutte le V^{n-1}_{r-1} di S_r. Se due V^n_{r-1} (che non sono coni) hanno le medesime prime polari, fra i loro poli sussisterà una omografia non degenere.

2. *Le* V^n_{r-1} *che hanno le medesime prime polari costituiscono un sistema lineare*, che s'indica con $\varDelta$. Infatti se $f=0, f_1=0, \ldots$ hanno le stesse prime polari, cioè le ipersuperficie $\varDelta_y f = 0$, $\varDelta_y f_1 = 0, \ldots$ (¹) appartengono allo stesso sistema lineare ∞^r, a questo appartiene pure la $\varDelta_y(\lambda f + \mu f_1 + \cdots) = 0$, qualsiansi $\lambda, \mu, \ldots$ e però $\lambda f + \mu f_1 + \cdots = 0$ ha le stesse prime polari di $f=0, f_1=0, \ldots$ In seguito escludiamo i sistemi $\varDelta$, nei quali *ogni* V^n_{r-1} possiede punto n^{uplo}.

3. Un punto unito dell'omografia dei poli, rispetto a due V^n_{r-1} colle stesse prime polari, è pure punto unito della omografia dei poli rispetto a due V^n_{r-1} qualunque del loro fascio (giacchè esso ha, rispetto alle V^n_{r-1} di questo fascio, una stessa prima polare). Inoltre, *affinchè un punto sia unito in tale omografia è condizione necessaria e sufficiente che sia* n^{uplo} *per una* V^n_{r-1} *del fascio*. Infatti, se si ha identicamente $\lambda \varDelta_y f = \mu \varDelta_y f_1$, segue $\varDelta_y(\lambda f - \mu f_1) = 0$: e viceversa, da questa identità si passa a quella.

4. Consideriamo il sistema di punti uniti relativi ad un fascio di un sistema $\varDelta$. Limitandoci alle cosidette omografie generali, dalle quali si ottengono tutte le altre come casi limiti, è noto (²) che questi punti uniti si distribuiscono in spazî, *fondamentali*, $S_{h'-1}, S_{h''-1}, \ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$ appartenenti ad S_r e tali che $\Sigma h^{(i)} = r+1$; e inoltre che ad ogni spazio fondamentale $S_{h^{(i)}-1}$ corrisponde uno spazio, *coniugato*, di piani uniti, al cui sostegno $S_{r-h^{(i)}}$ appartengono gli altri spazî fondamentali.

(¹) Si pone $\varDelta_y f = y_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + y_{r+1} \dfrac{\partial f}{\partial x_{r+1}}$.

(²) Cfr. Predella, *Le omografie in uno spazio a qualunque numero di dimensioni* (Annali di Matem., t. 17), ove sono citati i precedenti lavori di Segre.

Or bene: risulterà dalle cose seguenti che al variare in Λ di un suo fascio generico (e basta di un fascio in cui σ è massimo) rimane fisso il detto sistema di punti uniti, e che quindi ad ogni sistema Λ è collegato un determinato sistema di punti che sono i punti uniti dell'omografia dei poli di due sue V^n_{r-1} generiche. S'intende che per V^n_{r-1} particolari possono aggiungersi altri punti uniti.

Con Λ' s'indichi il più ampio sistema situato in Λ e che comprende un suo fascio (generico ma determinato), così che gli spazî fondamentali relativi a due V^n_{r-1} generiche di Λ' sieno quelli $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$ relativi al fascio. Poichè si proverà che $\Lambda' = \Lambda$, si avranno, nelle proprietà che ora dimostreremo, proprietà di Λ.

5. Si prendano $r+1$ punti indipendenti:

$$P'_1, P'_2, \dots P'_{h'} \text{ in } S_{h'-1}, \quad P''_1, P''_2, \dots P''_{h''} \text{ in } S_{h''-1}, \dots$$

La prima polare di P'_1 (ad es.), che è comune a tutte le V^n_{r-1} di Λ', deve avere in $S_{h''-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$ spazî $(n-1)^{\text{upli}}$, perchè i punti di questi spazî sono n^{upli} per particolari di quelle superficie (n. 3), cioè deve avere $S_{r-h'}$ come spazio $(n-1)^{\text{uplo}}$ (essendo $(n-1)^{\text{upli}}$ $r-h'+1$ punti indipendenti di esso). Adunque la detta prima polare di P'_1 si ottiene proiettando da $S_{r-h'}$ una ipersuperficie di $S_{h'-1}$: e analogamente può dirsi delle prime polari di $P'_2, \dots P'_{h'}, P''_1, \dots P''_{h''}, \dots$ Inoltre queste $r+1$ prime polari sono linearmente indipendenti e individuano quindi il sistema delle prime polari delle V^n_{r-1} di Λ'.

Ora facciasi una delle $\infty^{\sigma-1}$ trasformazioni omografiche che ammettono i detti spazî fondamentali $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$. Sono $\infty^{\sigma-1}$ perchè ad un punto X può farsi corrispondere un punto qualunque X' dello spazio $S_{\sigma-1}$ comune ai σ spazî $S_{r-h^{(i)}+1}$ che projettano da X gli spazî $S_{r-h^{(i)}}$, o anche per le formole (ridotte) di quelle omografie riferite alla piramide dei punti P, formole che sono ($a_1, a_2 \dots a_\sigma$ pararametri):

$$(1) \quad x_1 = a_1 y_1, \dots x_{h'} = a_1 y_{h'}, \quad x_{h'+1} = a_2 y_{h'+1}, \dots x_{h'+h''} = a_2 y_{h'+h''}, \dots$$

Per una tale trasformazione una V^n_{r-1} di Λ' si trasforma in un'altra che ha le stesse prime polari di quella ed anzi ha con quella gli stessi spazî fondamentali (o, in casi particolari, spazî fondamentali comprendenti questi), perchè le prime polari dei punti P manifestamente non cangiano per detta trasformazione. E però *le trasformate, per le dette* $\infty^{\sigma-1}$ *omografie, delle* V^n_{r-1} *di* Λ' *appartengono pure a* Λ' (cfr. n. 10).

6. Delle considerate omografie infinite contengono altri punti uniti ed infinite sono degeneri. Si aggruppino in qualsivoglia modo i σ spazî $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$, per es. in $\sigma - \tau + 1$ gruppi, e si prendano per spazî fondamentali gli spazî a cui appartengono rispettivamente quelli di ciascun gruppo (cioè nelle (1)

si prendano per le a_i soltanto $\sigma - \tau + 1$ valori diversi), si otterranno $\infty^{\sigma-\tau}$ delle sunnominate omografie.

In particolare si considerino quelle che hanno (ad es.) per spazî fondamentali S_{k-1}, $S_{h^{(\tau+1)}-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$, dei quali il primo sia individuato dagli spazî $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\tau)}-1}$ (onde si ha $h' + h'' + \cdots + h^{(\tau)} = k$). Basta far corrispondere ad un punto X un punto X' di $S_{\sigma-\tau}$ (contenuto in $S_{\sigma-1}$) comune agli spazî proiettanti da X gli spazî che si ottengono dai detti $\sigma - \tau + 1$ presi a $\sigma - \tau$. Che se il punto X' si sceglie nello spazio $S_{\sigma-\tau-1}$ intersezione di $S_{\sigma-\tau}$ e di $S_{r-k} = S_{h^{(\tau+1)}-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ (ovvero nelle (1) si fa $a_1 = a_2 = \cdots = a_\tau = 0$) si ha una omografia degenere cogli spazî singolari S_{k-1}, S_{r-k}, così che ad ogni punto di S_{k-1} corrisponde S_r e ad $S_k = XS_{k-1}$ corrisponde X'.

Applichisi questa omografia degenere ad una $V^n{}_{r-1}$ di $\mathcal{A}'$. La $V^n{}_{r-k-1}$ in cui essa taglia S_{r-k} si trasforma in una $V^n{}_{r-1}$ di $\mathcal{A}'$, per la quale S_{k-1} è spazio n^{uplo}. Dunque *al sistema $\mathcal{A}'$ appartengono $V^n{}_{r-1}$ che hanno n^{upli} gli spazî $S_{k-1} = S_{h'+h''+\ldots+h^{(\tau)}-1}$ determinati da $\tau (< \sigma)$ qualunque degli spazi fondamentali $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$* (cfr. n. 11).

7. Consideriamo σ $V^n{}_{r-1}$ di $\mathcal{A}'$ aventi ordinatamente spazî n^{upli} in $S_{r-h'}$, ... $S_{r-h^{(\sigma)}}$; le quali rappresenteremo brevemente con W_1, W_2, ... W_σ. Una qualunque W_1, ad es., non può essere contenuta nel sistema lineare di tutte o parte delle rimanenti: perchè, oltre lo spazio $S_{n-h'}$, la W_1 avrebbe allora n^{uplo} anche lo spazio $S_{h'-1}$ (almeno) comune a W_2, ... W_σ, il che è assurdo (risultandone che ogni punto di S_r dovrebbe essere n^{uplo} per W_1). Ne discende che in $\mathcal{A}'$ esistono $\infty^{\sigma-1}$ $V^n{}_{r-1}$, cioè quelle del sistema lineare individuato dalle W_i. Che non ve ne esistano altre si può vedere colla seguente considerazione. Un punto X, polo di una prima polare V^{n-1}_{r-1} rispetto ad una $V^n{}_{r-1}$, quando V^{n-1}_{r-1} resti fissa e $V^n{}_{r-1}$ descriva $\mathcal{A}'$, prende posizioni corrispondenti ad X in omografia di cui sono $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ spazî fondamentali, cioè varia in $S_{\sigma-1}$, onde le $V^n{}_{r-1}$ di $\mathcal{A}'$ non possono essere più che $\infty^{\sigma-1}$. Si conclude che *il sistema $\mathcal{A}'$* è $\infty^{\sigma-1}$ *ed è individuato dalle σ ipersuperficie* W_i: e quindi che *in ogni spazio fondamentale* $S_{h^{(i)}-1}$ *esiste una varietà base $V^n{}_{h-2}$ del sistema $\mathcal{A}'$*: cioè quella in cui $S_{h^{(i)}-1}$ è segato dalla W_i. Anzi, essendo ogni punto di $S_{h^{(i)}-1}$ n^{uplo} per W_1,... W_{i-1}, W_{i+1},... W_σ, si vede che *ciascun punto della varietà base di* $S_{h^{(i)}-1}$ *congiunto collo spazio coniugato* $S_{r-h^{(i)}}$ *dà un* $S_{r-h^{(i)}+1}$ *che sega tutte le* $V^n{}_{r-1}$ *di* $\mathcal{A}'$ in $V_{r-h^{(i)}}$ *aventi quel punto* n^{uplo}.

Ne discende anche che esiste un solo sistema W_1, W_2, ... W_σ di $W^n{}_{r-1}$ aventi in $S_{r-h'}$, ... $S_{r-h^{(\sigma)}}$ spazî n^{upli}.

8. Viceversa, prendendo σ spazî $S_{h'-1}$, ... $S_{h^{(\sigma)}-1}$ appartenenti ad S_r e tali che $\Sigma h^{(i)} = r + 1$, e detti $S_{r-h'}$, ... $S_{r-h^{(\sigma)}}$ gli spazî determinati da essi presi a $\sigma - 1$, le σ ipersuperficie W_1, ... W_σ d'ordine n, aventi rispettivamenti n^{upli} questi spazî e del resto qualunque (ma determinate) individuano un sistema $\mathcal{A}'$. Infatti, presi $r + 1$ punti come si è detto nel n. 5,

le prime polari di $P'_1, \ldots P'_{h'}$ rispetto alle V^n_{r-1} del sistema sono quelle rispetto a W_1; così le prime polari di $P''_1, \ldots P''_{h''}$ sono quelle rispetto a W_2; ecc. Si ha adunque un solo sistema di prime polari e l'omografia dei poli di due V^n_{r-1} (generiche) ha gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, \ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$.

9. Per essere le V^n_{r-1} di A' precisamente $\infty^{\sigma-1}$, una considerazione fatta nel n. 7 conduce ad un'altra conseguenza utile in seguito. Mentre V^n_{r-1}, partendo da una posizione generica, descrive A', il polo X di una polare fissa V^{n-1}_{r-1} deve descrivere $S_{\sigma-1}$; e si hanno come omografie di poli *tutte* le $\infty^{\sigma-1}$ che posseggono i considerati spazî fondamentali. Ossia: *ogni omografia con tali spazî fondamentali è omografia dei poli di due* V^n_{r-1} di A', *delle quali una sia scelta genericamente.*

10. Si può ora completare la proprietà del n. 5. Il nostro sistema A', prendendo le W_i a rappresentare anche i primi membri delle equazioni delle relative ipersuperficie rispetto alla piramide fondamentale dei punti P, ha l'equazione

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \cdots + \lambda_\sigma W_\sigma = 0 .$$

Applichiamo una trasformazione (1): si trova (essendo $S_{n-h'}$ spazio n^{uplo} per W_1, cioè questa funzione omogenea di ordine n delle sole $x_1, x_2, \ldots x_{h'}$; ecc.)

$$\lambda_1 a^n_1 W_1 + \lambda_2 a^n_2 W_2 + \cdots + \lambda_\sigma a^n_\sigma W_\sigma = 0$$

cioè lo stesso sistema A', per essere le a_i arbitrarie. Adunque *le* V^n_{r-1} *di un sistema* A' *provengono da una di esse per le trasformazioni omografiche che hanno gli spazî fondamentali* $S_{h'-1}, \ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$.

Però dal confronto delle due equazioni precedenti segue che non una sola, ma in generale più e precisamente $n^{\sigma-1}$ di queste omografie trasformano l'una nell'altra due V^n_{r-1} di A': onde si ottengono per una tale V^n_{r-1} altrettante trasformazioni omografiche in sè (coi detti spazî fondamentali), che in generale formano un sottogruppo delle trasformazioni omografiche in sè della ipersuperficie.

11. E anche la proprietà del n. 6 può essere completata. Infatti dalla equazione superiore del sistema A' si trae immediatamente (dovendo essere $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\tau = 0$) che *le* V^n_{r-1} *di* A' *che hanno* n^{uplo} *lo spazio* $S_{k-1} = S_{h'+h''+\ldots+h^{(\tau)}-1}$ *sono* $\infty^{\sigma-\tau-1}$. Ad es. sono $\infty^{\sigma-2}$ quelle che hanno n^{uplo} uno spazio fondamentale.

12. Si mostrerà adesso che esternamente ad un sistema A' non esistono ipersuperficie che abbiano con quelle di A' le medesime prime polari, ossia che $\mathit{A} = \mathit{A}'$, come si affermò nel n. 4. Si deve eccettuare il caso $n = 2$, nel quale manifestamente il teorema non sussiste.

Sia $\Omega = 0$ una ipersuperficie che ha le stesse prime polari di quelle di A'. Dovrà essere (mantenendo la piramide fondamentale già detta ed essendo a_{ki} coefficienti numerici):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k2} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k2} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'}} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{kh'} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{kh'} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+1}} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} + \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dico che, esclusi i coefficienti $a_{k1}\, a_{k2} \ldots a_{kh'}$ $(k=1,2\ldots h')$, $a_{k,h'+1}\, a_{k,h'+2} \ldots a_{k,h'+h''}$ $(k=h'+1, h'+2, \ldots h'+h'')$, ..., gli altri coefficienti a_{ki} sono nulli. Considerando, ad es., i coefficienti $a_{k,h'+1}$ $(k=1,2,\ldots h')$, si derivino le prime h' delle precedenti relazioni rispetto ad $x_{h'+1}$ e la $(h'+1)^{\text{esima}}$ rispetto ad $x_1, x_2, \ldots x_{h'}$ e sottraggansi ordinatamente queste da quelle: si troverà

$$0 = \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{ki} \frac{\partial^2 W_2}{\partial x_k \, \partial x_{h'+1}} - \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_k \, \partial x_i} \quad (i=1,2,\ldots h').$$

Se $n > 2$, le due sommatorie di questa identità, contenendo variabili diverse, devono annullarsi separatamente. Si ha quindi identicamente

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} = 0 \quad (i=1,2,\ldots h');$$

dalle quali segue che deve essere

$$\sum_{k=1}^{k=h'} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k} = 0.$$

Ora, se non fossero i coefficienti $a_{k,h'+1}$ nulli, quest' ultima identità significherebbe che $W_1 = 0$ ha (almeno) un punto n^{uplo} in $S_{h'-1}$ e quindi ha n^{uplo} lo spazio $S_{n-h'+1}$ che congiunge questo punto ad $S_{n-h'}$, mentre, per le nostre ipotesi, è $S_{n-h'}$ il solo spazio n^{uplo} di W_1. In modo analogo si procede per gli altri coefficienti da dimostrarsi nulli. Quindi le relazioni soprascritte devono essere

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{k1} \frac{\partial W_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'}} = \sum_{k=1}^{k=h'} a_{kh'} \frac{\partial W_1}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+1}} = \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+h''}} = \sum_{k=h'+1}^{k=h'+h''} a_{k,h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_k},$$

. . . .

Il primo gruppo di h' relazioni (e analogamente ogni altro gruppo) mostra che le prime polari dei punti di $S_{h'-1}$ rispetto ad $\Omega = 0$ sono quelle stesse di quei punti rispetto a $W_1 = 0$ (e quindi rispetto ad una V^n_{r-1} del nostro sistema $\mathcal{A}'$) cioè che $S_{h'-1}$ si trasforma in sè per l'omografia dei poli rispetto ad $\Omega = 0$, $W_1 = 0$. Limitandoci di nuovo alle omografie generali, diciamo $S_{h'_1-1}, S_{h'_2-1}, \dots$ $(h'_1 + h'_2 + \dots = h')$ gli spazi fondamentali di questa omografia e intendiamo che i punti $P'_1, P'_2, \dots P'_{h'_1}$ sieno presi in $S_{h'_1}$, i punti $P_{h'_1+1}$, $P_{h'_1+2}, \dots P_{h'_1+h'_2}$ in $S_{h'_2-1}$, ecc. Le precedenti relazioni diventeranno

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = a_{11} \frac{\partial W_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = a_{11} \frac{\partial W_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'_1}} = a_{11} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1}}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'_1+1}} = a_{h'_1+1,h'_1+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1+1}}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

. . . .

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_{h'+1}} = a_{h'+1,h'+1} \frac{\partial W_2}{\partial x_{h'+1}}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

. . . .

Ma, continuando a tener presente il primo gruppo di h' relazioni (e ripetendo poi lo stesso per gli altri), si osservi che derivando $\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$ rispetto ad x_j e $\frac{\partial \Omega}{\partial x_j}$ rispetto ad x_i e sottraendo si ottiene

$$\frac{\partial W_1}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots h'_1 \\ j = h'_1 + 1, \dots h'_1 + h'_2, \dots, h' \end{pmatrix}.$$

Ne risulta che

$$x_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial W_1}{\partial x_2} + \dots + x_{h'_1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1}} = 0$$

(e similmente ripetasi per le altre analoghe equazioni) è una ipersuperficie di ordine n che ha spazio n^{uplo} in $S_{r-h'}$ e in $S_{h'_2-1}, S_{h'_3-1}, \ldots$ cioè nello spazio $S_{r-h'_1}$, al quale appartengono tutti gli spazî fondamentali, eccettuato $S_{h'_1-1}$. Sicchè, dalle ultime relazioni deducendosi, per il teorema di Eulero,

$$\Omega = a_{11}\left(x_1 \frac{\partial W_1}{\partial x_1} + \cdots + x_{h'_1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1}}\right) + a_{h'_1+1,\, h'_1+1}\left(x_{h'_1+1} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1+1}} + \right.$$
$$\left. + \cdots + x_{h'_1+h'_2} \frac{\partial W_1}{\partial x_{h'_1+h'_2}}\right) + \cdots\cdots$$

si conclude che Ω appartiene ad un sistema, il quale comprende Λ' (ottenendosi Λ' col fare ivi $a_{1i} = a_{h'_1+1,\, h'_1+1} = \ldots$, ecc.) e quindi esiste in Λ, e che inoltre ha lo stesso carattere di Λ', gli spazî fondamentali essendo $S_{h'_1-1}, S_{h'_2-1}, \ldots S_{h''_1-1}, S_{h''_2-1}, \ldots\ldots$ Ma ciò deve escludersi, perchè si disse nel n. 4 di prendere in Λ il sistema Λ' generico o avente σ massimo. Adunque Ω deve essere di Λ' e si ha $\Lambda = \Lambda'$: c. d. d.

13. Tenendo fissi gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, \ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$ e variando le ipersuperficie $W_1, W_2, \ldots W_\sigma$, varia il sistema Λ in una ∞^{μ}, essendo $\mu = \Sigma\binom{n + h^{(i)} - 1}{h^{(i)} - 1} - \sigma$ e la totalità delle ${V^n}_{r-1}$ appartenenti a tali sistemi è $\infty^{\mu+\sigma-1}$. Soltanto quando sia $h' = h'' = \cdots = h^{(\sigma)} = 1$ (e quindi $\sigma = r + 1$) le W_i sono S_{r-1} n^{upli} e si ha un solo sistema Λ.

Si noti ora che la condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie inviluppo I^m_{r-1} di classe m sia apolare (coniugata se $m = n$) a tutte le ${V^n}_{r-1}$ che hanno uno spazio S_{r-h} n^{uplo} (non contenuto in uno spazio n^{uplo} a maggior dimensione) è che all'inviluppo I^m_{r-1} appartenga la stella di iperpiani che ha S_{n-h} per sostegno (e basta che a quell'inviluppo appartengano $\binom{m + h - 1}{h - 1}$ iperpiani linearmente indipendenti della stella). Adunque *la totalità $\infty^{\mu+\sigma-1}$ di ${V^n}_{r-1}$, testè definita, è caratterizzata dall'ammettere come inviluppi apolari tutte le I^m_{r-1} che passano per le stelle d'iperpiani di sostegni $S_{n-h^{(i)}}$.*

Il valore minimo di m è 2. Le quadriche inviluppi che passano per le nominate stelle variano in una totalità infinita $\frac{r(r+3)}{2} - \sum \frac{h^{(i)}(h^{(i)}+1)}{2}$ volte, cioè, per la $\Sigma h^{(i)} = r + 1$, infinita $\Sigma h^{(i)} h^{(j)} - 1$ volte ($i \neq j$ e $i, j = 1, 2, \ldots \sigma$). Onde *proprietà caratteristica di una ${V^n}_{r-1}$ avente con altre superficie le medesime prime polari è che rispetto ad essa siano apolari le $\infty^{\Sigma h^{(i)} h^{(j)} - 1}$ quadriche inviluppi passanti per σ stelle d'iperpiani di sostegni $S_{r-h'}, \ldots S_{r-h^{(\sigma)}}$ tali che $\Sigma h^{(i)} = r + 1$.* Tutte le ${V^n}_{r-1}$

soddisfacenti a questa condizione sono $\infty^{\mu+\sigma-1}$ e si distribuiscono in ∞^{μ} sistemi $\mathcal{A}$. Se $h' = h'' = \cdots = h^{(\sigma)} = 1$ (e solo allora) $\mu = 0$ e si ha un solo sistema $\mathcal{A}$.

Se gli spazî fondamentali sono S_0, S_{n-1}, le quadriche ora dette sono ∞^{n-1} e costituite dal punto S_0 e da un punto variabile di S_{n-1}.

14. L'osservazione del n. 9 si estende nel caso che gli spazî fondamentali $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$ non sieno tutti punti. Si ha cioè, osservando che per ciascuno degli ∞^{μ} sistemi $\mathcal{A}$ che competono a quegli spazî, le omografie dette nel n. 9 sono sempre le medesime, che *ogni omografia con dati spazî fondamentali è omografia dei poli di una* V^n_{r-1} *generica della* $\infty^{\mu+\sigma-1}$ *sopra definita e di un'altra* V^n_{r-1} (*che con quella fa parte di un sistema* $\mathcal{A}$).

15. Considerazioni al limite e i casi particolari per $r = 1, 2, 3$ inducono a pensare che le principali delle precedenti proprietà si conservino quando si passi dalle omografie generali alle particolari, cioè s'imagini che gli spazî fondamentali s'avvicinino indefinitamente fra loro in vario modo, onde si ottengano quelli che Predella chiamò *spazî multipli* (1). In questi casi limiti manca tuttavia la determinazione di un sistema $\mathcal{A}$ quale fu esposta nei n. 7, 8.

16. A meglio precisare il metodo da seguire nei casi particolari e anche a conferma delle deduzioni del n. 13, sarà utile aggiungere alcune osservazioni analitiche.

Le formole

$$y_i = \sum_k a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \dots r+1) \tag{2}$$

rappresentivo una *determinata* (non degenere) delle omografie con dati spazî fondamentali $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$. Se $\varphi = 0$ è una *qualsiasi* delle $\infty^{\mu+\sigma-1}$ V^n_{r-1} relative a quegli spazî esisterà (n. 14) un'altra V^n_{r-1} (che con quella entra in un sistema $\mathcal{A}$), di equazione $f = 0$, così che si abbia identicamente

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k a_{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \dots r+1). \tag{3}$$

Ne segue

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} = \sum_k a_{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_j}; \tag{4}$$

donde, scambiando i con j e sottraendo,

$$0 = \sum_k a_{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_j} - \sum_k a_{kj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_j} \quad \begin{pmatrix} i \neq j \\ i, j = 1, 2, \dots r+1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

(1) L. c., § 5, (14).

Queste condizioni [1] sono adunque *necessarie*. Ma esse sono anche *sufficienti* affinchè una $\varphi = 0$ abbia le stesse prime polari di una $f = 0$, essendo (2) la relazione omografica fra i poli; cioè insomma affinchè una $\varphi = 0$ sia della detta $\infty^{\mu+\sigma-1}$. Infatti, ponendo simbolicamente $\varphi = \beta_x{}^n$, dalle (5) si hanno le

$$(6) \qquad \sum_k a_{kt_1} \beta_k \beta_{t_2} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n} = \sum_k a_{kt_2} \beta_k \beta_{t_1} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n}$$

essendo $t_1 t_2 \dots t_n$ una qualunque disposizione dei numeri $1, 2, \dots r+1$. Si può quindi sempre determinare una funzione $f = b_x{}^n$ soddisfacente alle (3), perchè deve aversi

$$\begin{aligned} b_{t_1} b_{t_2} \dots b_{t_n} &= \sum_k a_{kt_1} \beta_k \beta_{t_2} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n} \\ &= \sum_k a_{kt_2} \beta_k \beta_{t_1} \beta_{t_3} \dots \beta_{t_n} \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

i cui secondi membri, per le (6), sono eguali. Si ritorna poi alle (2) per il teorema di Eulero. È facile del resto verificare che la f così ottenuta soddisfa alle (5). Infatti dalle (4) si ha

$$\sum_j a_{js} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} = \sum_{jk} a_{js} \, a_{ki} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_j}$$

e parimenti

$$\sum_j a_{ji} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_s} = \sum_{jk} a_{ji} \, a_{ks} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial x_j} :$$

dalle quali, sottraendo (per avere j, k lo stesso significato e quindi essere scambiabili), si hanno per la f appunto relazioni della forma (5).

Concludiamo che l' equazione della $V^n{}_{r-1}$ variabile nell' $\infty^{\mu+\sigma-1}$ relativa a dati spazî fondamentali $S_{h'-1}, \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$, si calcola partendo da una omografia (1) con questi spazî fondamentali, generica ma determinata (i rapporti delle a_{ik} cioè essendo *dati*) e soddisfacendo alle (5). Nella φ che si otterrà debbono restar liberi linearmente $\mu + \sigma - 1$ coefficienti.

[1] Ne discendono $\binom{r+1}{2}\binom{n-2+r}{r}$ relazioni omogenee lineari fra le $(r+1)^2-1$ quantità $a_{ii} - a_{jj}, a_{ij}, a_{ji}, \dots$ (contando cioè delle $a_{ii} - a_{jj}$ soltanto quelle linearmente indipendenti). Il primo numero è inferiore al secondo solamente quando $n = 2$ ed r qualunque, ovvero $n = 3$ ed $r = 1$. Ciò porta a ritenere che, esclusi questi casi, le $V^n{}_{r-1}$ che hanno con altre le medesime prime polari sono *particolari*, come si trova effettivamente per $r = 1, 2, 3$.

Notisi che le condizioni (5) dicono che alle φ sono apolari le quadriche inviluppi

$$\sum_k a_{ki}\,\xi_k\,\xi_j - \sum_k a_{kj}\,\xi_k\,\xi_i = 0 \tag{7}$$

indicando colle ξ coordinate di iperpiani. Che queste quadriche passino per gli spazî conjugati ai detti spazî fondamentali (n. 13), risulta subito dall'osservare che i piani uniti dell'omografia soddisfano ad equazioni della forma

$$\sum_k a_{ki}\,\xi_k - \varrho\xi_i = 0\,,$$

ovvero

$$\sum_k a_{ki}\,\xi_k\,\xi_j - \varrho\xi_i\,\xi_j = 0$$

donde, scambiando i con j e sottraendo, si ottengono precisamente le (7). Moltiplicando ordinatamente queste equazioni (7) per parametri variabili e sommando si ha il sistema delle quadriche apolari alle $\varphi = 0$.

Presa poi una *determinata* $\varphi = 0$ (nella quale adunque sieno costanti, oltre le a_{ik}, i suddetti $\mu + \sigma - 1$ coefficienti), si ha il sistema $\mathcal{A}$ di cui essa fa parte, applicando una trasformazione (2) $y_i = \sum_k a'_{ik}\,z_k$. La trasformata di $\varphi = 0$, variando le a'_{ik}, dà tutte le V^n_{r-1} di $\mathcal{A}$.

Astronomia. — *Il pianeta DQ 1898 (433)*. [1]. Nota del Corrispondente E. Millosevich.

L'orbita del pianeta DQ 1898 (433) ha destato, e ben giustamente, il più vivo interesse non solo nel mondo degli astronomi, ma presso tutti gli studiosi di filosofia naturale.

Il pianeta, anzichè giacere fra Marte e Giove, ha un'orbita, che ci obbliga a chiamarlo « pianeta intramarziale » e che lo colloca quale primo dei pianeti esteriori, così che l'ordine diventa il seguente: Mercurio, Venere, Terra, DQ 1898, Marte ecc. ecc.

L'astro è stato trovato sulla lastra fotografica lo stesso giorno 13 agosto da G. Witt a Berlino e da Charlois a Nizza; la priorità della scoperta spetta al primo.

Uno straordinario moto retrogrado accusava un'orbita eccezionale, sulla natura della quale potevasi congetturare, ma la realtà superò qualunque

[1] La numerazione, assegnata dal R. I. di Berlino, è impropria; il pianeta deve portare un nome proprio e nessun numero.