ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Matematica. — *Sui sistemi di ipersuperficie di* S_r *aventi le stesse prime polari.* Nota 2ª del Corrispondente E. BERTINI.

17. Per il caso di $r=3$ seguiremo il metodo esposto nella Nota 1ª (n. 16) Se l'omografia che si considera ha quattro punti uniti (distinti o successivi) le $\varphi=0$ soddisfacenti alle (5) cioè aventi le quadriche apolari (7) sono le V^n_{r-1} di un sistema $\mathcal{A}$. Negli altri casi formano più sistemi $\mathcal{A}$, uno qualunque dei quali si ottiene nel modo ivi detto. Per i 13 casi che sono da considerare si usano l'indicazione e le formole delle rispettive omografie date da Predella nella già citata Memoria ([1]). Le formole sono tutte comprese in questo tipo:

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= az_1 + \lambda z_2 + \mu z_3 + \nu z_4\\
y_2 &= \;.\qquad bz_2 + \varrho z_3 + \sigma z_4\\
y_3 &= \;.\qquad\;.\qquad cz_3 + \tau z_4\\
y_4 &= \;.\qquad\;.\qquad\;.\qquad dz_4
\end{aligned}
$$

e quindi le (5), a cui si deve soddisfare, si riducono alle

$$
(9)\quad
\begin{cases}
(a-b)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} - \lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = 0\\[2mm]
(a-c)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3} - \mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \varrho\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} = 0\\[2mm]
(a-d)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_4} - \nu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - \sigma\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} - \tau\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3} = 0\\[2mm]
(b-c)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_3} + \lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3} - \mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} - \varrho\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0\\[2mm]
(b-d)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_4} + \lambda\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_4} - \nu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} - \sigma\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} - \tau\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_3} = 0\\[2mm]
(c-d)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\,\partial x_4} + \mu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_4} + \varrho\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_4} - \nu\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_3} - \sigma\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial x_3} - \tau\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = 0.
\end{cases}
$$

18. 1° CASO: [0000]: $\lambda=\mu=\nu=\varrho=\sigma=\tau=0$. Si ha il sistema $\mathcal{A}$, di superficie

$$\theta_1 x_1{}^n + \theta_2 x_2{}^n + \theta_3 x_3{}^n + \theta_4 x_4{}^n = 0\,,$$

i parametri essendo $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$: le quadriche apolari sono le

$$\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_2\xi_4 = 0$$

inscritte nel tetraedro fondamentale.

([1]) § 9 (33).

2° Caso: $[(00)00]$: $a = b$, $\mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Si ha il sistema $\mathcal{A}$ (di monoidi)

$$\theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_2^n + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x^n_4 = 0 :$$

le quadriche apolari sono

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

aventi tre piani comuni $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e nel primo di essi il punto di contatto sopra una retta $x_1 = x_2 = 0$, cioè aventi quattro piani comuni, di cui due successivi.

3° Caso: $[(00)(00)]$: $a = c$, $b = d$, $\lambda = \nu = \varrho = \tau = 0$. Il sistema $\mathcal{A}$ (di superficie con retta $(n-1)^{\text{pla}}$) è

$$\theta_1 x_1 x_3^n + \theta_2 x_2 x_4^{n-1} + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0 ;$$

a cui sono apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0 ,$$

aventi comuni due piani $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e in ciascuno il punto di contatto sopra una retta ($x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$), cioè aventi quattro piani comuni due a due successivi.

4° Caso: $[(000)0]$: $a = b = c$, $\mu = \nu = \sigma = \tau = 0$. Il sistema $\mathcal{A}$ (di monoidi) è

$$\theta_1(\mathrm{A}x_1 x_3^{n-1} + \mathrm{B}x_2^2 x_3^{n-2}) + \theta_2 x_2 x_3^{n-1} + \theta_3 x_3^n + \theta_4 x_4^n = 0 ,$$

essendo A, B arbitrarie ma fisse (e precisamente, in funzione dei coefficienti dell'omografia presa: $\mathrm{A} = 2\varrho$, $\mathrm{B} = (n-1)\lambda$). Le quadriche apolari sono

$$\alpha_{11}\xi^2_1 + \alpha_{22}\xi^2_2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

ove $\lambda\alpha_{22} + \varrho\alpha_{13} + 0$, cioè $\dfrac{\alpha_{22}}{\alpha_{13}} = \text{cost.}$ Tali quadriche hanno quindi due piani comuni $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, toccano $x_3 = 0$ sopra una retta $x_2 = x_3 = 0$ ed hanno i coni circoscritti da un punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ non solo tangenti ma osculantisi lungo detta retta, cioè hanno quattro piani comuni, di cui tre successivi.

5° Caso: $[(0000)]$: $a = b = c = d$, $\mu = \nu = \sigma = 0$. Il sistema $\mathcal{A}$ (di superficie composte di un piano contato $n-3$ volte e di superficie gobbe di 3° grado di Cayley aventi questo piano per piano stazionario) è

$$\begin{gathered} x_4^{n-3}\,[\theta_1(\mathrm{A}x_1 x^2_4 + \mathrm{B}x_2 x_3 x_4 + \mathrm{C}x^3_3) + \\ + \theta_2(\mathrm{D}x_2 x_4^{n-1} + \mathrm{E}x^2_3 x_4) + \theta_3 x_3 x^2_4 + \theta_4 x^3_4] = 0 \end{gathered}$$

essendo A, B, C, D, E fisse e soddisfacenti alle due relazioni $\mathrm{A} = \mathrm{D}^2$, $\mathrm{C\,D} = \mathrm{B\,E}$ (in funzione dei coefficienti dell'omografia data: $\mathrm{A} = 4\tau^2$,

$B = 6(n-1)(n-2)\tau\lambda$, $C = 3(n-1)^2(n-2)\varrho\lambda$, $D = 2\tau$, $E = \varrho(n-1)$).

A questo sistema sono apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 = 0$$

ove $\lambda\alpha_{23} + \tau\alpha_{14} = 0$, $\varrho\alpha_{33} + \tau\alpha_{24} = 0$ (ossia $\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{14}} = \text{cost.}$, $\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{24}} = \text{cost.}$): le quali quadriche hanno quattro piani comuni successivi (in $x_4 = 0$) sulla sviluppabile di 3ª classe definita dalle

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = \varrho^2\theta^3 : \varrho\lambda\theta^2 : \varrho\lambda\theta : \tau\lambda\,,$$

poichè, sostituendo queste espressioni parametriche in θ nell'equazione precedente, si stacca il fattore θ^4.

I cinque sistemi $\varLambda$ trovati *sono* ∞^3 *e sono caratterizzati dall'ammettere* ∞^5 *quadriche apolari, cioè le quadriche tangenti a quattro piani distinti o successivi.*

Facendo sopra una *determinata* superficie del sistema, per ciascuno dei detti cinque casi, una trasformazione omografica della specie relativa al caso stesso, si verifica immediatamente che si ritorna al sistema primitivo.

19. In ciascuno dei quattro casi che seguono si trovano, in conformità ai teoremi generali della Nota 1ª, ∞^{n+2} superficie definite dall'ammettere ∞^4 quadriche apolari, cioè le quadriche aventi comuni (distinti o successivi) una retta (asse) e due piani. Ogni superficie appartiene poi ad un sistema $\varLambda$, ∞^2.

6° Caso: [100]: $a = b$, $\lambda = \mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Si hanno le superficie

(10) $$u_n(x_1x_2) + \theta_1 x_3^n + \theta_2 x_4^n = 0,$$

i parametri essendo θ_1, θ_2 e i coefficienti di u_n, forma binaria qualsiasi di x_1, x_2, dell'ordine n: rispetto alle quali sono apolari le quadriche

$$\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

passanti per una retta (asse) $x_1 = x_2 = 0$ e aventi comuni i due piani $x_4 = 0$, $x_3 = 0$. Eseguendo sopra una delle (10) una trasformazione omografica $y_1 = a'z_1$, $y_2 = a'z_2$, $y_3 = c'z_3$, $y_4 = d'z_4$ si ha l'equazione di un sistema $\varLambda$

$$\theta'_1 u_n(x_1x_2) + \theta'_2 x_3^n + \theta'_3 x_4^n = 0$$

i cui parametri sono θ'_1, θ'_2, θ'_3, mentre $u_n(x_1x_2)$ è qualsiasi ma determinata.

7° Caso: [(10)0]: $a = b = c$, $\mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Si hanno le superficie

(11) $$u_n(x_2x_3) + \theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_4^n = 0\,,$$

i parametri essendo, come prima, θ_1, θ_2 e i coefficienti di u_n. Le quadriche apolari

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

hanno comune il piano $x_4 = 0$, passano per una retta (asse) $x_2 = x_3 = 0$ e fra i piani per questa retta uno, $x_2 = 0$, ha un dato punto di contatto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (caso limite del precedente). Eseguendo sopra una delle (11) una trasformazione

$$y_1 = a'z_1 + \lambda' z_2, \; y_2 = a'z_2, \; y_3 = a'z_3, \; y_4 = d'z_4,$$

si trova un sistema $\mathit{\Delta}$

$$\theta'_1[u_n(x_2x_3) + x_1x_2^{n-1}] + \theta'_2 x_2^n + \theta'_3 x_4^n = 0$$

ove u_n è fissa e i parametri sono $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$.

8° Caso: $[1(00)]$: $a = b, c = d, \mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Si hanno le superficie (monoidi)

$$u_n(x_3x_4) + \theta_1 x_1 x_2^{n-1} + \theta_2 x_2^n = 0 \tag{12}$$

i parametri essendo pure θ_1, θ_2 e i cofficienti di u_n: rispetto a cui sono apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi^2_1 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 = 0$$

passanti per la retta (asse) $x_3 = x_4 = 0$ e aventi un piano comune $x_2 = 0$ col punto di contatto sopra una data retta $x_1 = x_2 = 0$ (pure caso limite del 6°). La trasformazione

$$y_1 = a'z_1 + \lambda' z_2, \; y_2 = a'z_2, \; y_3 = c'z_3, \; y_4 = c'z_4$$

fatta sopra una delle (12) dà un sistema $\mathit{\Delta}$

$$\theta'_1 u_n(x_3x_4) + \theta'_2 x_1 x_2^{n-1} + \theta'_3 x_2^n = 0$$

ove, al solito, u_n è qualunque ma fissa.

9° Caso: $[(100)]$: $a = b = c = d, \mu = \nu = \sigma = \tau = 0$. Le superficie (monoidi) sono

$$u_n(x_3x_4) + \theta_1(\mathrm{A}x_1x_3^{n-1} + \mathrm{B}x_2^2x_3^{n-2}) + \theta_2 x_2 x_3^{n-1} = 0 \tag{13}$$

in cui A, B sono costanti (in funzione dei coefficienti dell' omografia: $\mathrm{A} = 2\varrho$, $\mathrm{B} = (n-1)\lambda$) ed i parametri sono θ_1, θ_2 ed i coefficienti di u_n. Hanno per quadriche apolari le

$$\alpha_{11}\xi^2_1 + \alpha_{22}\xi^2_2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 = 0$$

colla condizione $\varrho\alpha_{13} + \lambda\alpha_{22} = 0$, cioè $\dfrac{\alpha_{13}}{\alpha_{22}} = \text{cost.}$; quadriche cioè che passano per una retta (asse) $x_3 = x_4 = 0$, che hanno fra i piani per questa retta uno, $x_3 = 0$, con dato punto di contatto $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e tali infine che i coni circoscritti ad esse da un punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ del piano $x_3 = 0$ non solo si toccano, ma si osculano lungo la $x_2 = x_3 = 0$ (che è pure caso limite dei precedenti). Si faccia sopra una delle (13) una trasformazione

$$y_1 = a'z_1 + \lambda' z_2\,,\ y_2 = a'z_2 + \varrho' z_3\,,\ y_3 = a'z_3\,,\ y_4 = a'z_4$$

e si troverà un sistema $\mathcal{A}$ dato dalla

$$\theta'_1[u_n(x_3x_4) + A'x_1x_3^{n-1} + B'x_2^2x_3^{n-2}] + \theta'_2x_2x_3^{n-1} + \theta'_3x_3^n = 0$$

ove i soli parametri sono $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$, gli altri coefficienti essendo arbitrarî ma fissi.

20. Nei due casi che seguono le superficie (apolari ad ∞^3 quadriche passanti per due rette (assi) distinte o successive) sono ∞^{2n+1} ed ogni superficie appartiene ad un sistema $\mathcal{A}$, ∞^1 (Cfr. Nota 1ª).

10° Caso: [11]: $a = b\,,\ c = d\,,\ \lambda = \mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Le superficie sono

$$u_n(x_1x_2) + v_n(x_3x_4) = 0\,, \tag{14}$$

i cui parametri sono i coefficienti delle forme binarie u_n, v_n. Ad esse sono apolari le quadriche

$$\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 = 0$$

passanti per due rette (assi) $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$. La trasformazione $y_1 = az_1\,,\ y_2 = az_2\,,\ y_3 = cz_3\,,\ y_4 = cz_4$ eseguita sopra una delle (14) dà un sistema $\mathcal{A}$

$$\theta'_1u_n(x_1x_2) + \theta'_2v_n(x_3x_4) = 0\,,$$

ove u_n, v_n sono adesso qualsiansi ma determinate.

11° Caso: [(11)]: $a = b = c = d\,,\ \lambda = \nu = \varrho = \tau = 0$. Le superficie (con retta $(n-1)^{\mathrm{pla}}$) sono

$$x_1u_{n-1}(x_3x_4) + x_2v_{n-1}(x_3x_4) + w_n(x_3x_4) = 0 \tag{15}$$

i parametri essendo i coefficienti delle forme binarie w_n, u_{n-1}, v_{n-1}, questi ultimi però vincolati dalla relazione identica

$$\mu\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_4} = \sigma\,\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_3}\,,$$

ossia

$$\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x_3} : \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_4} = \text{cost.}: \tag{16}$$

onde la loro equazione può scriversi nella forma

$$\begin{aligned}\theta_0x_1x_3^{n-1} &+ \theta_1[(n-1)\sigma x_1x_3^{n-2}x_4 + \mu x_2x_3^{n-1}]\\ &+ \theta_2[(n-2)\sigma x_1x_3^{n-3}x_4^2 + 2\mu x_2x_3^{n-2}x_4)\\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+ \theta_{n-1}[\sigma x_1x_4^{n-1} + (n-1)\mu x_2x_3x_4^{n-2}]\\ &+ \theta_nx_2x_4^{n-1} + w_n(x_3x_4) = 0\,.\end{aligned}$$

Hanno apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 = 0$$

colla condizione $\sigma\alpha_{14} + \mu\alpha_{23} = 0$, ovvero $\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{23}} = \text{cost.}$; quadriche adunque che si toccano nei punti di una retta $x_3 = x_4 = 0$ (caso limite del precedente). Fatta sopra una delle (15) la trasformazione $y_1 = a'z_1 + \mu'z_3$, $y_2 = a'z_2 + \sigma'z_4$, $y_3 = a'z_3$, $y_4 = a'z_4$ ove deve porsi $\frac{\mu'}{\sigma'} = \text{cost.}$ (per fissare la proiettività dei punti ai piani sulla retta $z_3 = z_4 = 0$, cioè per fissare le due rette fondamentali successive), si trova

$$\begin{aligned}\theta_1[x_1u_{n-1}(x_3x_4) + x_2v_{n-1}(x_3x_4) + w_n(x_3x_4)] +\\ + \theta_2(x_3u_{n-1} + x_4v_{n-1}) = 0\end{aligned}$$

come equazione delle superficie di un sistema $\mathcal{A}$. In essa w_n è arbitrariamente data, mentre le u_{n-1}, v_{n-1}, pure date, debbono soddisfare alla relazione identica (16).

21. Nei due casi seguenti le superficie (apolari alle ∞^2 quadriche costituite da un punto fisso e da un punto variabile di un piano passante o no per il punto fisso) sono $\infty^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ e ogni superficie fa parte di un sistema $\mathcal{A}$, ∞^1 (Cfr. Nota 1ª).

12° Caso: [20]: $a = b = c$, $\lambda = \mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Le superficie sono

$$\theta x_4^n + u_n(x_1x_2x_3) = 0 \tag{17}$$

i parametri essendo θ e i coefficienti della forma ternaria u_n: superficie a cui sono apolari le quadriche

$$\alpha_{14}\xi_1\xi_4 + \alpha_{24}\xi_2\xi_4 + \alpha_{34}\xi_3\xi_4 = 0$$

costituite dal punto $\xi_4 = 0$ e dai punti del piano $x_4 = 0$. Facendo sopra una delle (17) una trasformazione $y_1 = a'z_1$, $y_2 = a'z_2$, $y_3 = a'z_3$, $y_4 = d'z_4$, si ha un sistema $\mathcal{A}$

$$\theta'_1x_4^n + \theta'_2u_n(x_1x_2x_3) = 0$$

ove u_n è forma qualsiasi fissa.

13° Caso: [(20)]: $a = b = c = d$, $\mu = \nu = \varrho = \sigma = \tau = 0$. Le superficie (monoidi) sono

$$\theta x_1x_2^{n-1} + u_n(x_1x_2x_3) = 0 \tag{18}$$

coi parametri θ e i coefficienti di u_n, ed hanno apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 = 0$$

costituite dal punto $\xi_1 = 0$ e dai punti del piano $x_2 = 0$ (caso limite del precedente). Colla trasformazione $y_1 = a'z_1 + \lambda' z_2$, $y_2 = a'z_2$, $y_3 = a'z_3$, $y_4 = a'z_4$ eseguita sopra una delle (18), si trova l'equazione

$$\theta_1' x_2^n + \theta'_2 u_n(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

ove u_n è qualsiasi ma determinata.

22. Il calcolo dei sistemi $\mathcal{A}$ si può fare o col metodo qui seguito, applicando cioè il teorema del n. 5 o col metodo (meno semplice) adottato nella Nota dell'Accad. di Torino, applicando cioè le identità (3).

L'esattezza dei risultati fu pure verificata per la seconda via, il che è utile osservare, specie per i casi limiti (Cfr. n. 15).

Si noti ancora che, mentre nei primi cinque casi si ha una semplice definizione geometrica, comune ad essi, dei sistemi $\mathcal{A}$ (n. 18), negli altri casi si sono trovate soltanto le equazioni di tali sistemi. Non è difficile però dare una interpretazione geometrica di queste equazioni in ogni singolo caso (e l'interpretazione si può fare in vario modo) analoga a quella data nella Nota suddetta. Ma, per ora, si tralascia di esporre cosifatte singole interpretazioni, talune sono ovvie, di cui mentre altre (specialmente quella del Caso 11°) si presentano in forma molto complessa [1].

Matematica. — *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali.* Nota di FEDERIGO ENRIQUES, presentata dal Socio CREMONA.

Il sig. Nöther [2] ha considerato le superficie algebriche che posseggono un *fascio* di curve razionali C, cioè una serie di curve razionali C dipendenti algebricamente da un parametro, tale che ogni punto generico appartenga ad *una* curva C. Egli ha dimostrato che « ogni superficie possedente

[1] In queste interpretazioni conviene introdurre la nozione di *punto d'iperosculazione,* cioè punto semplice di una superficie il cui piano tangente taglia in una linea con punto n^{uplo} nel punto di contatto, costituita quindi di n rette per il punto (condizione necessaria e sufficiente per ciò è che la prima polare del punto si spezzi nel piano tangente e in una superficie d'ordine $n-2$ non passante per il punto): e conviene anche considerare quel particolare punto d'iperosculazione, in cui le n rette, costituenti la sezione, formino un gruppo ciclico-projettivo.

[2] *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler curven besitzen,* Mathem. Annalen, Bd. 3.