ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

coi parametri θ e i coefficienti di u_n, ed hanno apolari le quadriche

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{14}\xi_1\xi_4 = 0$$

costituite dal punto $\xi_1 = 0$ e dai punti del piano $x_2 = 0$ (caso limite del precedente). Colla trasformazione $y_1 = a'z_1 + \lambda' z_2$, $y_2 = a'z_2$, $y_3 = a'z_3$, $y_4 = a'z_4$ eseguita sopra una delle (18), si trova l'equazione

$$\theta_1' x_2^n + \theta'_2 u_n(x_1 x_2 x_3) = 0,$$

ove u_n è qualsiasi ma determinata.

22. Il calcolo dei sistemi A si può fare o col metodo qui seguito, applicando cioè il teorema del n. 5 o col metodo (meno semplice) adottato nella Nota dell'Accad. di Torino, applicando cioè le identità (3).

L'esattezza dei risultati fu pure verificata per la seconda via, il che è utile osservare, specie per i casi limiti (Cfr. n. 15).

Si noti ancora che, mentre nei primi cinque casi si ha una semplice definizione geometrica, comune ad essi, dei sistemi A (n. 18), negli altri casi si sono trovate soltanto le equazioni di tali sistemi. Non è difficile però dare una interpretazione geometrica di queste equazioni in ogni singolo caso (e l'interpretazione si può fare in vario modo) analoga a quella data nella Nota suddetta. Ma, per ora, si tralascia di esporre cosifatte singole interpretazioni, talune sono ovvie, di cui mentre altre (specialmente quella del Caso 11°) si presentano in forma molto complessa [1].

Matematica. — *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico o di genere due di curve razionali.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

Il sig. Nöther [2] ha considerato le superficie algebriche che posseggono un *fascio* di curve razionali C, cioè una serie di curve razionali C dipendenti algebricamente da un parametro, tale che ogni punto generico appartenga ad *una* curva C. Egli ha dimostrato che « ogni superficie possedente

[1] In queste interpretazioni conviene introdurre la nozione di *punto d'iperosculazione*, cioè punto semplice di una superficie il cui piano tangente taglia in una linea con punto n^{uplo} nel punto di contatto, costituita quindi di n rette per il punto (condizione necessaria e sufficiente per ciò è che la prima polare del punto si spezzi nel piano tangente e in una superficie d'ordine $n-2$ non passante per il punto): e conviene anche considerare quel particolare punto d'iperosculazione, in cui le n rette, costituenti la sezione, formino un gruppo ciclico-projettivo.

[2] *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler curven besitzen*, Mathem. Annalen, Bd. 3.

un fascio di curve razionali C si può trasformare birazionalmente in una superficie possedente un fascio di coniche; quest'ultima superficie (e quindi la prima) si trasforma in una rigata se si può determinare una curva unisecante le coniche del fascio ». Ma l'esistenza di una siffatta curva unisecante viene stabilita soltanto se il genere p del fascio (considerato come ente algebrico ∞^1 che ha per elementi le C) è nullo, ossia se il fascio delle C è lineare. Resta dunque ancora insoluta la questione « se una superficie possedente un fascio irrazionale di curve razionali sia sempre riferibile ad una rigata (avente il genere p del fascio) ».

Tale questione viene qui risoluta affermativamente quando $p=1$ o $p=2$; viene dunque stabilito (con una concisa dimostrazione) il teorema:

Ogni superficie possedente un fascio ellittico o di genere due di curve razionali si può riferire ad una rigata (risp. ellittica o di genere due).

L'estensione del teorema per $p>2$ formerà oggetto di una Nota ulteriore.

1. Sia F una superficie possedente un fascio di genere p di coniche. Possiamo supporre che essa appartenga ad uno spazio S_n, dove n è grande quanto si vuole, e che le nominate coniche C di essa stieno in piani π non intersecanti ulteriormente la superficie. Si scelga una qualsiasi curva χ unisecante i piani π, e si proietti ogni conica C dal punto della χ che appartiene al suo piano, in un S_{n-1} fissato.

La superficie F viene così rappresentata sopra una rigata doppia φ di S_{n-1}, la curva di diramazione sopra φ è costituita da una curva K bisecante le generatrici, ed eventualmente anche da un certo numero ϱ di generatrici $a_1 \dots a_\varrho$. Queste debbon esser tangenti a K (o incontrare K in punti doppî) perchè ogni generatrice di ϱ che non tocchi K è proiezione doppia di una conica C irriducibile.

Supponiamo per semplicità che i ϱ punti di contatto non sieno doppî per K. Accenneremo poi alle modificazioni da introdurre nei ragionamenti successivi, quando valga l'ipotesi opposta.

Vogliamo costruire su φ una curva L, unisecante le generatrici, la quale passi per i punti di contatto $A_1 \dots A_\varrho$ della K con $a_1 \dots a_\varrho$, e tocchi la K stessa negli ulteriori punti d'incontro.

Si scelga sopra φ un sistema lineare di curve θ unisecanti le generatrici e privo di punti base. La dimensione r del sistema (completo) delle θ potrà supporsi grande ad arbitrio, giacchè il sistema stesso può sempre essere ampliato sommando alle curve primitive un certo numero di generatrici di φ [1].

Mediante il sistema scelto delle θ, si trasformi la rigata φ in modo che le dette θ vengano segate dagli iperpiani di un S_r; si avrà una ri-

[1] Cfr. Segre, *Courbes et surfaces réglées algébriques*, II. Mathem. Annalen, Bd. 34.

gata φ' di S_r, sulla quale la curva K e le generatrici tangenti $a_1 \dots a_\varrho$ di φ avranno come corrispondenti risp. una curva K' e ϱ generatrici tangenti $a'_1 \dots a'_\varrho$.

La curva K' può supporsi una curva normale dello spazio S_r, altrimenti la rigata doppia φ' potrebbe riguardarsi come proiezione di un'altra rigata doppia di S_{r+1} avente lo stesso numero di generatrici di diramazione [1], e si potrebbero riferire i ragionamenti che seguono a questa seconda rigata invece che a φ'. Ora, indicato con P il genere di K' (o di K), l'ordine di K' (supposto $r > P$), sarà

$$m = r + P .$$

Questo ordine m avrà la stessa parità o disparità di ϱ poichè la curva $K' + a'_1 + \dots + a'_\varrho$ costituisce la intera curva di diramazione della rigata doppia φ', e quindi $m + \varrho$ è pari.

Si considerino gli iperpiani passanti per i ϱ punti di contatto di $a'_1 \dots a'_\varrho$ con K', essi formano un sistema lineare la cui dimensione è (almeno) $r - \varrho$. Questi iperpiani incontrano ulteriormente K' in $m - \varrho$ punti.

La determinazione degli iperpiani del detto sistema che toccano K' in $\frac{m-\varrho}{2}$ punti (cioè che toccano K' in tutti i punti d'incontro cadenti fuori di quelli fissati) si può far dipendere, come è noto, da un problema di bisezione delle funzioni abeliane inerenti a K'. Questo problema ammette certo soluzioni se

$$r - \varrho \geq \frac{m-\varrho}{2}$$

ossia se si è preso

$$r \geq P + \varrho .$$

Ora (supposto appunto di aver preso $r \geq P + \varrho$) gli iperpiani di S_r che soddisfano alle condizioni richieste segano su φ' delle curve L', cui corrispondono sopra φ le curve L domandate. Infatti le L, unisecanti le generatrici di φ passano pei ϱ punti di contatto di K con $a_1 \dots a_\varrho$, e toccano ulteriormente la K stessa ovunque la incontrano.

2. Ritorniamo alla superficie F, contenente un fascio di coniche C, che avevamo rappresentato sulla rigata doppia φ. Alle curve L di φ corrispondono sopra F certe curve λ, bisecanti le coniche C del fascio, che hanno il genere minimo fra tutte le bisecanti possibili. Avendo indicato con p il genere del fascio di coniche (che è il genere della rigata doppia φ) il genere delle λ, valutato secondo la formula di corrispondenza di Zeuthen sarà

$$2p - 1 .$$

[1] Per la costruzione di tale rigata cfr. Segre, l. c., pag. 4 (**).

Le λ possono eventualmente essere spezzate in due curve unisecanti le C. È ciò che avviene sempre quando $p = 0$ [1]. La presenza di una siffatta λ spezzata basta a riferire punto per punto la superficie F ad una rigata di genere p. Ci metteremo dunque nel caso più sfavorevole, supponendo di aver ottenuto una curva λ irriducibile ($p > 0$).

La costruzione di una λ di genere $2p - 1$ su F è stata fatta nell'ipotesi che sulla rigata doppia φ le generatrici $a_1 \dots a_\varrho$ toccassero K in punti semplici. Nell'ipotesi opposta si riesce ugualmente allo scopo introducendo una leggiera modificazione: non basta più che le curve L passino per quei ϱ punti, ma per ciascun punto doppio si esige un contatto della L con K tale che il numero delle intersezioni di L e K assorbite in quel punto, risulti dispari.

3. Rappresentiamo nuovamente la superficie F sopra una rigata doppia scegliendo però la curva χ del n. 1, non più ad arbitrio, ma in modo che la proiezione di λ sia la curva di diramazione della rigata. Basta perciò determinare la χ come luogo dei poli delle corde delle coniche C che congiungono le intersezioni di λ colle dette C.

Si indichi con Φ la rigata doppia così ottenuta, e con λ' la sua curva di diramazione omologa a λ, alla quale eventualmente dovranno sommarsi alcune generatrici di Φ.

Procedendo come innanzi (coll'avvertenza che un punto comune a λ' e ad una generatrice di Φ è sempre un punto doppio) costruiremo su Φ una curva unisecante le generatrici e tangente alla curva di diramazione in ogni punto d'incontro. A questa curva corrisponderà sopra F una curva σ (eventualmente spezzata) di genere $2p - 1$. La curva σ, come la λ, biseca, le coniche C; inoltre sopra ogni conica C le due coppie segate da λ e da σ si separano armonicamente. Possiamo esprimere questa relazione dicendo che λ e σ sono due *bisecanti armoniche delle coniche* C.

4. Supponiamo ora $p = 1$. Come nel caso generale si ottengono sopra la superficie F due bisecanti armoniche delle coniche C, aventi il genere minimo $2p - 1$; in questo caso ciascuna di tali bisecanti è ellittica o si spezza in due unisecanti. Prendiamo in esame l'ipotesi più sfavorevole, in cui le due bisecanti λ e σ sieno irriducibili.

Possiamo costruire su F un fascio razionale costituito da coppie di coniche C, scegliendo una g'_2 nell'ente ellittico ∞^1 che ha per elementi le C.

Ora ci proponiamo di costruire su F una involuzione (di coppie di punti) che trasformi ogni C nella coniugata, accoppiando dunque le C nel modo detto innanzi.

Si prendano in un modo particolare due C coniugate: sieno C_1 e C_2. Indichiamo con $A_1 A'_1$ e $B_1 B'_1$ le coppie di punti segate su C_1 risp. da λ

[1] E così appunto si può riferire la F ad un piano. Cfr. il n° 9 del mio lavoro *Sulle irrazionalità...* Mathem. Annalen — Bd. 49.

e da σ; e indichiamo similmente con $A_2 A'_2$ e $B_2 B'_2$ le coppie segate da λ e da σ su C_2.

Facciamo corrispondere sulla curva ellittica λ i punti $A_1 A_2$ (oppure $A_1 A'_2$); otteniamo una involuzione razionale g'_2; questa g'_2 è notoriamente permutabile colla involuzione ellittica γ'_2 e perciò contiene pure la coppia $A'_1 A'_2$ (o risp. $A'_1 A_2$). Ora se si prendono due altre C coniugate, generiche, i due punti in cui l'una di esse è segata da λ corrispondono ai due punti di sezione dell'altra in un modo che è razionalmente determinato, appena sia fissata su λ la nominata g'_2 (la scelta di questa g'_2 dipende da un' irrazionalità quadratica puramente *aritmetica*).

Associando i punti $B_1 B_2$, $B'_1 B'_2$ della curva ellittica σ, otterremo del pari sopra di essa una involuzione razionale g'_2 permutabile coll'involuzione γ'_2 segata dalle C, e mediante una tale g'_2 risulterà fissato razionalmente un riferimento ordinato delle due coppie di punti segate da σ sopra due C coniugate.

Ciò posto, date due C coniugate generiche, ai quattro punti in cui l'una di esse è segata da λ e da σ si possono far corrispondere ordinatamente i quattro punti d'incontro dell'altra colle stesse due curve, e poichè le due quaterne di punti sono armoniche, e si corrispondono in esse le coppie di punti coniugati armonici, le due coniche C risultano riferite proiettivamente in un modo determinato.

Ora le coppie di punti omologhi di due C coniugate, danno luogo su F ad una involuzione I che accoppia le C coniugate, come appunto avevamo richiesto.

5. Si costruisca una nuova superficie F′ i cui punti corrispondano alle coppie dell'involuzione I ottenuta su F. Alle coniche C di F corrispondono su F′ curve razionali C′, e precisamente ogni C′ corrisponde a due C coniugate. Le C′ formano dunque su F′ un fascio *lineare* di curve razionali. Allora (col sig. Nöther) si può costruire su F′ una curva unisecante le C′ (cfr. anche il n. 2). A questa corrisponde sopra F una curva unisecante le C.

Tanto basta per affermare che la superficie F può essere riferita birazionalmente ad una rigata ellittica, di cui le generatrici corrispondono alle C.

6. Il metodo precedente si fonda sopra la circostanza che « date due curve ellittiche λ e σ rappresentate doppiamente sopra uno stesso ente ellittico (o curva) γ, ogni g'_2 di γ corrisponde (in due modi) ad una g'_2 (coniugata di sè stessa) tanto su λ che su σ''. L'ente ellittico γ era nel nostro caso il fascio delle coniche C della superficie F, nel qual fascio appunto avevamo scelto una g'_2 qualsiasi.

Ora evidentemente basta pel nostro scopo aver constatato l'esistenza di una particolare g'_2 di γ cui corrisponda tanto su λ come su σ una g'_2 (coniugata di se stessa).

Osservato ciò, il metodo si estende senz'altro al caso in cui il genere p del fascio di coniche C, valga $p = 2$.

Infatti si ha il seguente lemma: *ogni curva di genere 3 rappresentata sopra una curva doppia di genere due, è iperellittica*; e perciò « se due curve λ e σ di genere $2p-1=3$ sono rappresentate doppiamente sull'ente γ di genere $p=2$, alla g'_2 di γ corrisponde tanto su λ come su σ una g'_2 (coniugata di sè stessa) ».

Resta da giustificare il lemma precedente.

A tal fine (procedendo per assurdo) si dimostrerà che una curva di genere 3 non iperellittica non può essere riferibile ad una curva doppia di genere due, ossia non può contenere una involuzione di coppie di punti senza coincidenze. Per ciò basta considerare la quartica piana senza punti doppî (curva canonica di genere 3, non iperellittica), ed osservare come una involuzione sopra di essa viene subordinata da un'omologia piana armonica, di cui l'asse incontra la quartica in qualche punto unito.

Fisica. — *Sulla variazione della costante dielettrica del caoutchouc per la trazione* (1). Nota dei dott.ri O. M. Corbino e F. Cannizzo, presentata dal Socio Blaserna.

Ci siamo proposti di ricercare se la trazione abbia influenza sulla costante dielettrica del caoutchouc.

La disposizione impiegata è analoga a quella descritta in un lavoro pubblicato da uno di noi sull'influenza della trazione sulla costante dielettrica

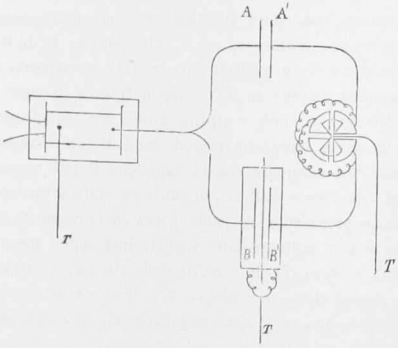

Fig. 1.

del vetro (2). Un rocchetto di Rumkorff (fig. 1), animato dalla corrente di

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo, diretto dal prof. Damiano Macaluso.

(2) O. M. Corbino, *Ricerche sulla variazione della costante dielettrica per la trazione del coibente*. Riv. scient. ind. n. 8-9, 1897.