ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

3° Il mare biancastro è stato osservato tre volte con cielo sereno, una volta con cielo caliginoso, ma sempre in prossimità della terra.

Dunque si ha mare azzurro quando cospirano a produrre questo colore quello di *diffusione* proprio dell' acqua in grandi masse e quello del cielo pure azzurro *per diffusione*.

Si ha il color plumbeo del mare, quando, essendo il cielo annuvolato, manca la sua luce azzurra, ed è sostituita da quella grigia delle nubi, le quali inoltre si specchiano nel mare, ed anche così gli conferiscono il loro colore.

Si ha mare biancastro con cielo sereno presso le rive in causa delle materie sospese nell' acqua, più abbondanti presso terra, le quali riflettono ogni sorta di luce.

Gli osservatori non hanno notato la tinta verde di transizione che si ha sempre prima di giungere al largo, dipendente da particelle sospese nell'acqua, abbastanza copiose e grossolane per riflettere ogni luce; la quale però ripassando per l' acqua prima di giungere all' occhio dell' osservatore, assume il color verde di *trasmissione* attraverso acqua abbastanza limpida. La ragione di tale omissione è che era stabilito che le osservazioni si facessero al largo; e così solo eccezionalmente gli osservatori notarono alcune volte il colore del mare presso le spiaggie.

I risultati di queste osservazioni sul colore del mare concordano con quelli degli studî di uno di noi sul colore delle acque [1].

Matematica. — *Sulle funzioni reali d' una variabile.* Nota del Corrispondente Carlo Somigliana.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali.* Nota di Federigo Enriques, presentata dal Socio Cremona.

1. In questa Nota mi propongo di stabilire in tutta la sua generalità il teorema:

Una superficie algebrica possedente un fascio di curve razionali si può trasformare birazionalmente in una rigata, avente il genere p del fascio.

Questo teorema è stato dimostrato per $p=0$ dal sig. Nöther [2], e per $p=1,2$ in una mia Nota precedente.

Appunto il metodo che ivi ho adoperato, viene qui opportunamente esteso. La dimostrazione procede in modo conciso, come è consentito dai limiti imposti al presente scritto.

[1] A. Riccò, Memorie della Società degli Spettroscopisti italiani, vol. V, pag. 101, 1876; vol. VIII, pag. 1, 1879.

[2] *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen.* Mathem. Annalen, Bd. III.

2. Una superficie possedente un fascio di curve razionali può sempre trasformarsi (col sig. Nöther) in una superficie possedente un fascio di coniche.

Sia F una superficie possedente un fascio di genere p (>1) di coniche C. Come è indicato nella nostra Nota citata, possiamo ottenere sopra F, o una curva bisecante le C spezzata in due unisecanti, oppure due curve irriducibili λ e σ bisecanti armoniche delle C, aventi il genere minimo $2p-1$. La prima ipotesi conduce subito (col sig. Nöther) a rappresentare la F sopra una rigata. Esaminiamo dunque la seconda ipotesi.

Le due curve λ e σ sono riferite doppiamente ad un ente algebrico $\infty' \gamma$, di genere p, che è il fascio delle C o una curva i cui punti corrispondono biunivocamente agli elementi (C) del fascio. Poniamo ora che si possa costruire su γ una serie lineare g'_n cui corrisponda, tanto su λ come su σ, una g'_n (coniugata di se stessa). La possibilità di questa costruzione verrà stabilita in seguito.

Aggruppiamo le curve C ad n ad n, secondo i gruppi della g'_n; otteniamo così sopra F un fascio lineare di curve composte $C_1+C_2+\cdots+C_n$. Tra i gruppi di C che abbiamo costruito consideriamone uno generico $C_1, C_2 \ldots C_n$.

A questo gruppo (che è un gruppo della g'_n fissata su γ), corrispondono su λ due gruppi G_n G'_n di una stessa g'_n ben determinata, i quali, presi insieme, costituiscono le $2n$ intersezioni di λ con $C_1+C_2+\cdots+C_n$; precisamente G_n contiene un punto di C_1, un punto di C_2 ecc., mentre G'_n contiene le intersezioni residue.

In questo modo a due punti di C_1, intersezioni di λ, si possono far corrispondere ordinatamente, in un modo razionalmente determinato, due punti di C_2, due punti di C_3 ecc. Similmente ai due punti di C_1 intersezioni di σ si possono associare in modo razionalmente determinato i due punti di C_2, di C_3 ecc. intersezioni della stessa σ. Ora sopra ciascuna C le coppie segate da λ e da σ si separano armonicamente; quindi si viene a stabilire un riferimento razionalmente determinato di un gruppo armonico di C_1 ad un gruppo armonico di C_2 ecc. Le $C_1\, C_2 \ldots C_n$ risultano così riferite proiettivamente l'una all'altra. Ad un punto P_1 di C_1 corrisponde un punto P_2 di $C_2 \ldots$ un punto P_n di C_n.

I gruppi di punti analoghi a $P_1\, P_2 \ldots P_n$ formano sopra F una involuzione I_n. Riferiamo i gruppi di I_n ai punti d'una nuova superficie F'. Sopra F' si avrà un fascio *lineare* di curve razionali C', corrispondenti ciascuna ad n curve C: $C_1\, C_2 \ldots C_n$. Si può costruire (col sig. Nöther) una curva unisecante le C' su F'; a questa curva corrisponde su F una curva unisecante le C, la quale permette di riferire la F ad una rigata.

3. Resta pertanto da stabilire il lemma di cui abbiamo fatto uso:

Se due curve λ e σ di genere $P=2p-1$ sono riferite ad una stessa curva doppia γ di genere $p>1$ (senza punti di diramazione) [1], si può co-

[1] È noto che esistono $2^{2p}-1$ curve di genere P, birazionalmente distinte, riferibili ad una stessa curva doppia di genere p, senza punti di diramazione. Cfr. Hurwitz « *Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspuncten* ». Math. Annalen Bd. 39.

struire su γ una g'_n cui corrisponda tanto su λ come su σ una g'_n (trasformata in sè stessa dall'involuzione γ' di cui le coppie corrispondono ai punti di γ).

Anzitutto si noti che n deve esser pari, cioè $n = 2m$, perchè su λ (o su σ) una g'_n trasformata in sè stessa dall'involuzione γ' deve possedere due gruppi uniti, costituiti ciascuno da $\frac{n}{2}$ coppie di γ'.

Ora il problema proposto sembra ammettere soluzioni per $m \geq p-1$ come si desume da un opportuno conto di costanti. Ma volendo togliere ogni dubbio resultante dall'uso di procedimenti enumerativi forse non pienamente rigorosi, risolveremo il problema proposto per $m = \mathrm{P}$.

Prendasi su γ un arbitrario gruppo $\mathrm{G_P}$ di $\mathrm{P} = 2p-1$ punti; esso appartiene ad una serie completa non speciale g^{p-1}_{2p-1} che indicheremo con s.

A questa serie corrisponde su λ (e ugualmente su σ) una serie g^{p-1}_{4p-2} composta mediante la involuzione γ' di cui le coppie corrispondono ai punti di γ; la g^{p-1}_{4p-2} appartiene ad una serie completa (non speciale) g^{2p-1}_{4p-2}. Ora mediante la serie g^{2p-1}_{4p-2} si trasformi la curva λ in una curva d'ordine $4p-2$ di un S_{2p-1}; questa verrà trasformata in sè stessa da un'involuzione proiettiva che ha uno spazio di punti uniti S_{p-1}, base pel sistema ∞^{p-1} degli iperpiani che segano su λ la g^{p-1}_{4p-2} sopra nominata; l'involuzione stessa ammetterà dunque un altro S_{p-1} di punti uniti, il quale sarà pure base per un sistema ∞^{p-1} di iperpiani seganti su λ un'altra serie g^{p-1}_{4p-2} composta colle coppie dell'involuzione γ'.

Cerchiamo che cosa corrisponde su γ alle serie considerate su λ. Otterremo come corrispondente alla g^{2p-1}_{4p-2} una serie non lineare contenuta nella serie completa g^{3p-2}_{4p-2} doppia della $g^{p-1}_{2p-1} \equiv s$; entro questa serie non lineare, e per conseguenza entro la g^{3p-2}_{4p-2}, si avrà, oltre la nominata $g^{p-1}_{2p-1} \equiv s$ contata due volte, un'altra g^{p-1}_{2p-1} (che designeremo con s') pure contata due volte, in corrispondenza alla seconda g^{p-1}_{4p-2} composta colle coppie di γ' che abbiamo costruito su λ.

Le due g^{p-1}_{2p-1} ottenute su γ, s ed s', non hanno gruppi comuni; un gruppo qualunque G della prima, ed un gruppo G′ della seconda, non sono equivalenti, ma contati due volte appartengono ad una g'_{4p-2} cui corrisponde sopra λ una g'_{4p-2} trasformata in se stessa dall'involuzione γ'.

Ripetendo gli stessi ragionamenti in relazione alla curva σ, otterremo ancora su γ un'altra serie g^{p-1}_{2p-2} che designeremo con s'', non avente gruppi comuni con s, tale che un qualsiasi gruppo G di s ed un gruppo G″ di s'', contati due volte, appartengono ad una g'_{4p-2} cui corrisponde sopra σ una g'_{4p-2} trasformata in sè stessa dall'involuzione γ'; la serie s'' come s' appartiene, contata due volte, alla serie completa g^{3p-2}_{4p-2} doppia della s.

Ora le serie complete s' ed s'' non hanno alcun gruppo comune, oppure coincidono; nel secondo caso una qualsiasi g'_{4p-2} determinata da un gruppo di s e da un gruppo di s', contati due volte, dà ugualmente una g'_{4p-2} tanto su λ che su σ, e quindi risolve il problema proposto. Ma in questo caso è anche facile vedere che λ e σ sono birazionalmente identiche.

Supponendo λ e σ birazionalmente distinte, avremo dunque su γ tre serie g_{2p-1}^{p-1}: s, s', s'', senza gruppi comuni, le quali, contate due volte, appartengono ad una stessa g_{4p-2}^{3p-2}, la risoluzione del problema proposto dipende dalla costruzione di una g'_{4p-2} contenente tre gruppi di $2p-1$ punti, ciascuno contato due volte, contenuti risp. entro le serie s, s', s''. Tale costruzione si effettua in un numero finito di modi. Infatti si trasformi γ in una curva γ_1 d'ordine $4p-2$ di S_{3p-2}, mediante la nominata serie g_{4p-2}^{3p-2}; i gruppi della serie s verranno dati su γ_1 da iperpiani tangenti in $2p-1$ punti, formanti una certa serie s_1, ∞^{p-1}. Analogamente si avranno altre due serie ∞^{p-1} di iperpiani: s'_1, s''_1, in corrispondenza alle serie s', s'' di γ; e le tre serie di iperpiani $s_1\ s'_1\ s''_1$ non avranno, due a due, alcun iperpiano comune. Ora uno spazio S_{3p-4} che sia comune a tre iperpiani appartenenti risp. alle serie s_1, s'_1, s''_1 è base di un fascio d'iperpiani secante sopra γ_1 una g'_{4p-2} che contiene tre gruppi di $2p-1$ punti, ciascuno contato due volte, risp. contenuti in s, s', s''. Di tali S_{3p-4} ve n'è un numero finito che è il prodotto delle classi delle tre serie d'iperpiani considerate. Ciò si vede più chiaramente eseguendo una trasformazione per dualità. Infatti si hanno allora da determinare le rette dello S_{3p-4} che incontrano tre varietà V_{p-1}, di dimensione $p-1$, senza punti comuni; tali rette si ottengono segando una delle V_{p-1} colla varietà V_{2p-3} delle rette congiungenti i punti delle altre due.

Pertanto resta risoluto il problema proposto.

Chimica fisica. — *Nuove considerazioni sugli equilibrî fisici nelle miscele isomorfe*. Nota di Giuseppe Bruni, presentata dal Socio G. Ciamician.

In un lavoro precedente (¹) io ho studiato i fenomeni di equilibrio fisico nelle miscele isomorfe ed ho mostrato come le regole poste da Küster (²) intorno a questi fenomeni non siano accettabili.

Io ho segnatamente preso in esame la seconda regola di Küster, la quale dice che per miscele di sostanze perfettamente isomorfe la fase solida che si separa nel congelamento ha la stessa composizione della liquida. Ho mostrato che questa regola è contraria sia ai dati sperimentali come alle speculazioni teoriche, ed ho particolarmente rilevato come essa sia in contraddizione con la formola che secondo Beckmann (³) rappresenta i fenomeni che avvengono nella separazione di una soluzione solida.

(¹) Rendic. di questa Accad., 1898, 2° sem., 138.
(²) Zeitschr. f. physik. Ch. V, 601; VIII, 584; XII, 508; XVI, 525; XVII, 357.
(³) Zeitschr. f. physik. Ch. XXII, 612.