ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Ed invero, il gas posto fra i poli (p. es. vapore di sodio) assorbisce quelle radiazioni che è capace di emettere. Ora, se esso emette, quando non esiste il campo magnetico, una radiazione di N vibrazioni, emette invece, allorchè si eccita l'elettrocalamita ed in virtù del fenomeno di Zeeman, tre radiazioni, di N, N_1 ed N_2 vibrazioni al secondo, essendo N compreso fra N_1 ed N_2, ed essendo la vibrazione N parallela alle linee di forza, e le vibrazioni N_1 ed N_2 perpendicolari a queste linee (¹).

Dunque il medesimo corpo assorbirà, quando è nel campo magnetico ed è attraversato da un fascio di luce bianca perpendicolare alle linee di forza, una radiazione di N vibrazioni parallela, e due di N_1 ed N_2 vibrazioni perpendicolari, alle dette linee.

Nell'ipotesi in cui la luce bianca sia polarizzata circolarmente, di ciascuna delle tre luci N, N_1, N_2, rimarrà non assorbita una delle componenti rettilinee, e precisamente una vibrazione N perpendicolare alle linee di forza, e due vibrazioni N_1, N_2, parallele a queste linee. L'analizzatore circolare non può estinguere queste tre vibrazioni rettilinee, e perciò deve apparire luce gialla (nel caso del sodio) quando si crea il campo magnetico. Anche qui la luce, che appare, è identica a quella che il corpo assorbisce, e dà uno spettro, che è sensibilmente quello di emissione del corpo stesso.

Non sono riescito ancora ad avere sperimentalmente una sicura conferma di questa previsione, la quale, come si vede, è subordinata alla validità di certe ipotesi. In vero la realizzazione di questa esperienza non è così facile, come quella dell'esperienza relativa al caso della luce parallela alle linee di forza. S'incontrano in pratica grandi difficoltà nell'ottenere, per mezzo d'un analizzatore circolare, l'estinzione di un raggio polarizzato circolarmente, anzi non vi si riesce in modo abbastanza completo, e ciò per varî motivi che non starò a spiegare, tanto se si fa uso di lamine quarto di onda, quanto se s'impiegano i parallelepipedi a riflessione totale.

Matematica. — *Le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte* (²). Nota 2ª del dott. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

In questa Nota, dopo di aver esteso alle forme con coefficienti qualunque la identità, analoga a quella di Lagrange, trovata per quelle forme lineari alle differenze in cui sono eguali fra di loro i coefficienti del primo e dell'ultimo termine, dimostrerò che non è possibile porre una tale identità a

(¹) Secondo il sig. Cornu (Eclairage électrique, 29 janvier 1898) anche la vibrazione parallela alle linee di forza si sdoppia. Per semplicità ho trascurato questo sdoppiamento; ma è evidente che anche tenendone conto non muterebbe il risultato finale al quale conduce il ragionamento esposto in questo paragrafo.

(²) V. questi Rendiconti, 1° sem. 1898, pag. 257.

fondamento di una decomposizione, in fattori del primo ordine, caratteristica per le forme equivalenti alla loro aggiunta.

Prenderò occasione da questo fatto per porre in rilievo alcune delle difficoltà che, spesso ed inaspettatamente, si incontrano quando si tenta di ritrovare, nel calcolo alle differenze, risultati paralleli a quelli che, con metodi più ovvî, si ottengono nel calcolo infinitesimale.

Dimostrerò poi che qualunque funzione integrale di una forma alle differenze equivalente alla sua aggiunta, è anche integrale di una forma a coefficienti costanti e parimenti equivalente alla sua aggiunta. Per queste ultime forme, giovandomi del fatto che la loro equazione caratteristica è reciproca, troverò una formula di decomposizione analoga a quelle che hanno dato Jacobi e Darboux per le forme differenziali.

Spero che, per l'importanza dell'argomento, non sarà senza qualche interesse questo mio lieve contributo, e mi è di incoraggiamento il vedere alcuni dei risultamenti a cui sono pervenuto nelle Note precedenti, usati dal prof. Pincherle nelle sue recenti Note: *Sulla risoluzione approssimata delle equazioni alle differenze*; e: *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio* (¹).

1. L'identità, analoga a quella data dal Lagrange per le forme differenziali, fu estesa a quelle forme alle differenze in cui sono eguali all'unità i coefficienti del primo e dell'ultimo termine (²). Per vedere ora se quella restrizione sia o no necessaria, basta osservare che: essendo

$$\mathrm{A}(y) = a_0 y + a_1 \theta y + \cdots + a_n \theta^n y ,$$

indicando con $\bar{\mathrm{A}}(y)$ la sua aggiunta, con $y_1, y_2 \dots y_n, z_1, z_2, \dots, z_n$, due sistemi aggiunti, con s_{rs}, la somma $\sum_{h=1}^{n} \theta^r y_h\, \theta^s z_h$ e ricordando che:

$$\mathrm{A}(y) = \frac{a_0}{\theta F(y_1, y_2, \dots, y_n)} \begin{vmatrix} y & , y_1 & , \dots , & y_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^n y & , \theta^n y_1 & , \dots , & \theta^n y_n \end{vmatrix}$$

e che $F(y_1, y_2, \dots, y_n) F_{-1}(z_1, z_2, \dots, z_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, si ha:

$$(1) \qquad \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0} \bar{\mathrm{A}}(y) = \begin{vmatrix} y & , s_{0,1} , & s_{0,0} , & \dots , & s_{0,-(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^n y & , s_{n,1} , & s_{n,0} , & \dots , & s_{n,-(n-2)} \end{vmatrix} .$$

Ciò posto, e per le formule (12) e (21) trovate nella Nota: *Sui determinanti di funzioni* . . . (³).

(¹) Questi Rendiconti, seduta del 17 aprile 1898.

(²) Cfr. il n. 7 della Nota: *La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze* (questi Rendiconti, seduta del 3 maggio 1896).

(³) Questi Rendiconti, seduta del 12 aprile 1896.

dallo sviluppo di quello stesso determinante nullo ivi considerato si ricava:

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0}\theta z\,\mathrm{A}(y)+s_{0,1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\psi(\theta y\,,\theta z)+(-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\psi(y\,,\theta z)=0$$

ed anche:

$$\frac{(-1)^n}{a_0}z\mathrm{A}(y)+s_{0,1}\psi(\theta y\,,z)+(-1)^n\psi(y\,,z)=0\,.$$

In modo interamente analogo si giunge alla identità:

$$\frac{(-1)^n}{a_0}y\overline{\mathrm{A}}(z)+s_{-1,0}\,\psi(y\,,\theta^{-1}z)+(-1)^n\psi(y\,,z)=0$$

e, sottraendo:

$$z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^n a_0\left\{s_{0,1}\,\psi(\theta y\,,z)-s_{-1,0}\,\psi(y\,,\theta^{-1}z)\right\}. \tag{2}$$

Ricordando ora che y_r è integrale della $\mathrm{A}(y)$, si ha:

$$s_{0,1}=\sum_{r=0}^{n-1}y_r\theta z_r=-\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{a_0}\theta^s y_r\,\theta z_r=-\sum_{s=1}^{n}\frac{a_s}{a_0}\sum_{r=0}^{n-1}\theta^s y_r\,\theta z_r=-\frac{a_n}{a_0}$$

$$s_{-1,0}=\theta^{-1}s_{0,1}=-\theta^{-1}\frac{a_n}{a_0}\,.$$

Basta dunque che il rapporto $\frac{a_n}{a_0}$ *sia costante per la operazione* θ *perchè dalla identità* (2) *si abbia*:

$$z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^{n+1}a_n\Delta\psi(y\,,\theta^{-1}z)\,. \tag{3}$$

In particolare adunque, quest' ultima identità si potrà sempre ritener valida se la forma è equivalente alla sua aggiunta ([1]).

Potendo poi supporre $a_n=1$, avremo semplicemente:

$$z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^{n+1}\,\Delta\psi(y\,,\theta^{-1}z)\,. \tag{4}$$

Ponendo $\theta^n z$ al posto di z, avremo l' identità:

$$\theta^n z\mathrm{A}(y)-y\overline{\mathrm{A}}(\theta^n z)=(-1)^{n+1}\,\Delta\psi(y\,,\theta^{n-1}z) \tag{5}$$

nella quale non compariscono potenze negative del simbolo operatorio θ applicate a funzioni arbitrarie della x.

2. Per le forme equivalenti alle loro aggiunte, fattovi $a_n=1$, e ricordando che in questo caso: $\overline{\mathrm{A}}(\theta^n z)=\theta^n\overline{\mathrm{A}}(z)=(-1)^n\,\mathrm{A}(z)$,

$$\theta^n z\,\mathrm{A}(y)+(-1)^{n+1}y\,\mathrm{A}(z)=(-1)^{n+1}\,\Delta\psi(y\,,\theta^{n-1}z) \tag{6}$$

([1]) Cfr. formole (36) e (37) della Nota precedente.

e, ponendovi y al posto di z,

$$(7) \qquad A(y)\,(\theta^n y + (-1)^{n+1} y) = (-1)^{n+1}\,\varDelta\psi(y\,,\,\theta^{n-1} y)\,.$$

Di qui l' identità:

$$(8) \qquad \sum_{r=0}^{m-1} Ay(x_0 + r)\,\{y(x_0 + n + r) + (-1)^{n+1} y(x_0 + r)\} =$$
$$= (-1)^{n+1}\,\psi(y(x_0 + m)\,,\,\theta^{n-1} y(x_0 + m))$$

che può utilmente servire nello studio di serie più generali delle ricorrenti.

3. Se nella (6) si pone al posto della y un integrale, ω_1, della forma A, si trova:

$$(9) \qquad A(z) = \frac{1}{\omega_1}\,\varDelta\psi(\omega_1 \theta^{n-1} z)\,,$$

ho verificato però che inutilmente si cercherebbe di ricavare, da questa identità e dalla $\varDelta\psi(\omega_1\,,\,\theta^{n-1}\omega_1) = 0$ la decomposizione in fattori cui ho accennato da principio. Volendo vedere fino a qual punto si può, per questa strada, spingere l' analogia con le ordinarie forme differenziali, prenderemo come sistemi aggiunti i coefficienti della relazione:

$$\varphi(x) = A_0(z\,,\,x)\,\varphi(z) + \cdots + A_{m-1}(z\,,\,x)\,\varphi(z + u - 1)$$

ed i reciproci della ultima linea nel determinante $\digamma(A_0\,,\,A_1\,,\,\ldots\,,\,A_{m-1})$. Al § 3 del mio *Contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze* [3] ho indicato questi reciproci coi simboli

$$B_{n-1}(z\,,\,x)\,,\; B_{n-1}(z\,,\,x - 1) \ldots B_{n-1}(z\,,\,x + n - 1)$$

ed ho dato lo sviluppo, sia delle A che delle B, sotto forma di determinanti.

L' esame diretto di questi determinanti ci mostra immediatamente che *per le forme a coefficienti costanti che sono equivalenti alle loro aggiunte, si ha*:

$$B_{n-1}(z\,,\,x) = \theta^{n-1} A_0\,,\, B_{n-1}(z\,,\,x - 1) = \theta^{n-2} A_0\,,\,\ldots\,,\, B_{n-1}(z\,,\,x - n + 1) = A_0\,.$$

Dalle note proprietà della ψ si ricava allora:

$$\psi(A_0\,,\,\theta^{n-1-r} A_0) = 0 \quad (r = 1\,,\,2 \ldots n - 1)$$

e cioè $\theta^{-r} A_0$ è integrale della forma di ordine $n - 1$ in z, $\psi(A_0\,,\,\theta^{n-1} z)$, ed

[3] Annali di matematica, anno 1896.

in conseguenza ho $\psi(A_0\theta^{n-1}z)=\psi_1\Delta\frac{z}{\theta^{-r}A_0}$. Posto $A_0=\omega_1$ ho, dalla (9):

$$(10)\qquad A(z)=\frac{1}{\omega_1}\Delta\psi_1\Delta\frac{1}{\theta^{-r}\omega_1}z.$$

Anche però nel caso di forme a coefficienti costanti, ora considerato, non potremo seguitare la decomposizione ripetendo per la ψ_1 i ragionamenti fatti per A perchè ψ_1 non è, in generale, nè a coefficienti costanti, nè equivalente alla sua aggiunta.

4. Giova osservare, a questo proposito, che *la condizione di essere decomponibili nello stesso numero di fattori equivalenti ciascuno a ciascuno e disposti nello stesso modo, non è in generale sufficiente per la equivalenza di due forme, se le potenze della θ non hanno tutte esponenti del medesimo segno.*

Valgano al caso le due forme $B=\Delta\alpha_1\Delta\alpha_2 y$, $C=\Delta^{-1}\alpha_1\Delta^{-1}\alpha_2 y$ che non sono, in generale, equivalenti, benchè lo sieno le forme: $\Delta\alpha_1 y$, $\Delta\alpha_2 y$ rispettivamente alle forme $\Delta^{-1}\alpha_1 y$, $\Delta^{-1}\alpha_2 y$.

Volendo allora, dal confronto dei fattori di due forme, ricavare una condizione sufficiente per la loro equivalenza, occorrerà prima trasformare le date in altre equivalenti in cui non compariscono potenze negative della θ. Ciò si ottiene agevolmente considerando che se è $C=A.B$, e sono p e q i massimi esponenti negativi della θ, nelle A e B rispettivamente, con $p+q=n$; si ha per $\theta^n C$ la decomposizione $\theta^n C=\theta^p(\theta^q A\theta^{-q}).\theta^q B$, ed in generale se $C=A_1.A_2\dots A_r$ e sono $p_1, p_2\dots p_r$ i massimi esponenti negativi della θ nelle $A_1, A_2\dots A_r$, si ha:

$$\theta^n C=\theta^{p_1}(\theta^{n-p_1}A_1\theta^{-(n-p_1)})\,\theta^{p_2}\,(\theta^{n-p_1-p_2}A_2\theta^{-(n-p_1-p_2)})\dots\theta^{p_r}A_r.$$

In particolare se si avesse:

$$(11)\qquad C=E_1.E_2\dots.E_r\dots.E_n,\ \text{con}\ E_r=a_r\,\theta^{-1}y+b_1 y,$$

avrei la forma equivalente:

$$(12)\qquad \theta^n C=F_1.F_2\dots F_r\dots.F_n$$

con

$$F_r=\theta(\theta^{n-r}E_r\theta^{-(n-r)})=\theta(\theta^{n-r}a_r.\theta^{-1}y+\theta^{n-r}b_r y)=\theta^{n-r+1}a_r.y+\theta^{n-r+1}b_r.\theta y;$$

decomposta in n fattori del primo grado in θ.

5. Al n. 9 della Nota: *La forma aggiunta . . .*, ho dato, per una forma lineare alle differenze, la decomposizione:

$$(14)\qquad A=\frac{1}{\alpha_1}\Delta\frac{1}{\alpha_2}\Delta\frac{1}{\alpha_3}\dots\Delta\frac{1}{\alpha_n}.\Delta\frac{1}{\alpha_{n+1}}y$$

avremo allora:

$$\overline{A} = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_n} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_{n-1}} \dots \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_2} \Delta^{-1} \frac{1}{\alpha_1} y .$$

Da cui:

$$(15) \qquad \theta^n \overline{A} = \frac{1}{\theta^n \alpha_{n+1}} \Delta \frac{1}{\theta^{n-1} \alpha_n} \Delta \frac{1}{\theta^{n-2} \alpha_{n-1}} \dots \Delta \frac{1}{\theta \alpha_2} \Delta \frac{1}{\alpha_1} y .$$

Una condizione, *semplicemente sufficiente*, per la equivalenza di una forma con la sua aggiunta sarebbe data allora da una decomposizione (14) con le relazioni:

$$(16) \qquad \alpha_r = \theta^{n-r+1} \alpha_{n-r+2} \qquad r = 1, 2 \dots n+1 .$$

Poichè, al loco citato, è data la espressione della α_r per due sistemi aggiunti di integrali, si ricaverebbero di qui facilmente delle relazioni fra questi integrali su cui non mi pare opportuno d'insistere, perchè non sarebbero necessarie per la equivalenza di una forma con la sua aggiunta, come si è visto al numero precedente.

6. Poichè le forme equivalenti alle loro aggiunte sono periodiche con periodo n, i loro integrali saranno anche integrali della forma a coefficienti costanti:

$$(17) \qquad C(y) = c_0 y(x) + c_n \theta^n y(x) + c_{2n} \theta^{2n} y(x) + \dots + c_{n^2} \theta^{n^2} y(x) .$$

Il quesito di determinare i coefficienti c_{rn} è pienamente risolto al § V del citato *Contributo*, e potrebbe ridursi alla ricerca di una forma lineare alle differenze $B = \sum_0^{n(n-1)} b_r \theta^r$ tale che nel prodotto $C = B . A$ sieno nulli i coefficienti di potenze di θ con esponenti non congrui a zero (mod. n).

La forma C così determinata, si può facilmente ridurre in una dell'ordine n mediante la trasformazione:

$$(18) \qquad n \Delta x = \Delta z .$$

Per effetto di una tale trasformazione la varietà V, composta di tutti i valori che si possono immaginare attribuiti alla x, vien fatta corrispondere all'una od all'altra delle n varietà: $V_1, V_2 \dots V_n$, composte con elementi di V tutti congrui fra loro (mod. n), a seconda della determinazione della costante arbitraria che risulta dalla integrazione della (18).

Le funzioni di x, che ammettono il periodo n, sono trasformate in funzioni di z costanti in ciascuna delle varietà V_r, e quelle che ammettono il periodo 1, sono trasformate in funzioni di z costanti in tutta la varietà $V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

Poichè ora i coefficienti $c_0, c_n \dots c_{n^2}$ sono costanti in V, per la forma trasformata di $C(y)$, che potremo indicare con:

$$(19) \qquad C(f) = c_0 f(z) + c_n \theta f(z) + \cdots + c_{n^2} \theta^n f(z),$$

si avranno integrali la cui espressione algebrica rimane immutata qualunque sia la varietà V_r che vien fatta corrispondere a V. Si noti però che, se $y_1, y_2, \dots y_n$ è un sistema fondamentale della (19), ed è μ una radice primitiva n^{esima} dell'unità, nel quadro:

$$\begin{array}{cccc} y_1, & y_2, \dots, & & y_n \\ \mu^x y_1, & \mu^x y_2, \dots, & & \mu^x y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu^{(n-1)x} y_1, & \mu^{(n-1)x} y_2, & \dots, & \mu^{(n-1)x} y_n, \end{array}$$

una qualunque delle linee ci dà ancora un sistema fondamentale della (19), e tutte le n^2 funzioni ivi contenute formano un sistema fondamentale della (18).

7. Dal modo stesso con cui la C fu definita risulta che se una funzione è integrale della A, quando il campo V di variabilità si riduce ad una qualunque delle V_r, è anche integrale della (19). *Voglio ora dimostrare che le forme* $A(y)$, $C(f)$ *hanno sempre, nel senso ora indicato, almeno un sistema fondamentale di integrali a comune.*

Ed infatti, perchè un sistema $\varphi_0, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$ fondamentale per la A, non lo sia per C, occorre che fra i suoi elementi passi una relazione della forma:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \cdot \sum_{r=0}^{n-1} c_{r,s} \mu^{rx} \cdot \varphi_s = 0 \quad \text{con } c_{r,s} \text{ costanti in V}$$

cioè:

$$\sum_{r=0}^{n-1} \mu^{rx} \sum_{s=0}^{n-1} c_{r,s} \varphi_s = 0 .$$

Poichè $\sum_{s=0}^{r-1} c_{r,s} \varphi_s$ è ancora un integrale di A; tutto si riduce a provare che *non per qualunque sistema fondamentale di* A *è possibile una relazione identica della forma* $\sum_{r=0}^{n-1} \mu^{rx} \varphi_r = 0$. Se questo fosse, presi due sistemi fondamentali $y_0, y_1 \dots y_{n-1}, y_0, y'_1 \dots y'_{n-1}$, con un elemento comune, ed i rimanenti diversi, potrei sempre fare in modo che, in quelle identità che suppongo aver luogo sia per l'uno che per l'altro dei due sistemi, fossero eguali i coefficienti di y_0, ed allora, dalle due:

$y_0 + \mu^x y_1 + \cdots + \mu^{(n-1)x} y_{n-1} = 0, \quad y_0 + \mu^x y'_1 + \cdots + \mu^{(n-1)x} y'_{n-1} = 0,$

si ha, sottraendo:

$$y_1 - y'_1 + \mu^x (y_2 - y'_2) + \cdots + \mu^{(n-2)x} (y_{n-1} - y'_{n-1}) = 0,$$

e qui giova notare che le differenze $y_r \dots y'_r$ sono esprimibili in funzione lineare omogenea, con coefficienti costanti in V e non tutti identicamante nulli, degli elementi:

$$y_0\,,\,y_1 \dots y_{n-1}\,.$$

Per un altro sistema $y_0\,,\,y'_1\,,\,y''_2 \dots y''_n$, distinto dai due precedentemente considerati, avrei analogamente:

$$y_1 - y'_1 + \mu^x(y_2 - y''_2) + \cdots + \mu^{(n-2)x}(y_{n-1} - y''_{n-1}) = 0.$$

E, sottraendo:

$$y'_2 - y''_2 + \mu^x(y'_3 - y''_3) + \cdots + \mu^{(n-3)x}(y'_{n-1} - y''_{n-1}) = 0,$$

dove, per le differenze $y'_r - y''_r$ si possono ripetere le medesime osservazioni fatte per le $y_r - y'_r$.

Così continuando troverei in fine l'identità $y_{n-1}^{(n-2)} - y_{n-1}^{(n-1} = 0$ che non è possibile perchè quella differenza può esprimersi in funzione lineare omogenea, a coefficienti costanti in V e non tutti identicamente nulli, degli integrali di un sistema fondamentale di A.

8. Le due forme A e C, che ammettono un sistema fondamentale comune, dovranno riguardarsi come equivalenti. Siccome però la proprietà di essere equivalente alla sua aggiunta è comune a tutte le forme equivalenti ad una data che ammette tale proprietà, potremo senz'altro concludere che la C è equivalente alla sua aggiunta e cioè che: *Qualunque funzione integrale di una forma lineare alle differenze equivalente alla sua aggiunta, è anche integrale di una forma equivalente alla sua aggiunta ed a coefficienti costanti.*

9. Per avere una ulteriore conferma dei risultamenti cui sono pervenuto, ho considerato che, se la forma C deve essere equivalente alla sua aggiunta, poichè i suoi coefficienti sono costanti, dovranno verificare le relazioni

$$c_{rn} = (-1)^n_{n(r-n)}\,.$$

Ora queste relazioni si verificano col calcolo diretto mediante un procedimento analogo a quello indicato al § III del citato *Contributo*. È facile vedere che $c_0\,,\,c_n \dots c_{n^2}$ sono i determinanti di ordine $n(n-1)+1$ che si ottengono dalla matrice:

$$M = \left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & \theta a_0 & \theta a_1 & \dots \theta a_{n-2} & \theta a_{n-1} & \theta a_n & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \theta^2 a_0 & \dots \theta^2 a_{n-3} & \theta^2 a_{n-1} & \theta^2 a_{n-1} & \theta^2 a_n & 0 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

togliendo ordinatamente n colonne fra le $n+1$ che occupano i posti 1°, $(n+1)^{\text{esimo}}$, $(2n+1)^{\text{esimo}}$, $(n^2+1)^{\text{esimo}}$.

Tenendo conto della periodicità e delle altre relazioni che hanno luogo fra i coefficienti di una forma equivalente alla sua aggiunta, si scorge facilmente che i determinanti che si ottengono in modo simmetrico rispetto alle colonne estreme (cioè gli sviluppi dei coefficienti c_{rn}, $c_{(n-r)n}$), sono eguali a meno di un fattore $(-1)^n$.

Ho di più osservato che, tolto un fattor comune che risulta ai coefficienti così formati, rimane $c_0 = (-1)^n c_n = a_0\, \theta a_0 \dots \theta^{n-1} a_0$, e gli altri coefficienti sono formati linearmente con gli n^2 elementi $a_0\, a_1 \dots a_n$, $\theta a_0\, \theta a_1 \dots \theta a_n, \dots$ $\theta^{n-1} a_0\, \theta^{n-1} a_1 \dots \theta^{n-1} a_n$ (¹).

10. Da quello che abbiamo detto risulta che *la equazione caratteristica della* C:

$$(20) \qquad c_0 + c_n z + \dots + c_{n^2} z^n = 0\,,$$

è reciproca. Se indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2, \dots \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2} \dots$ le sue radici, avremo, per la C, la decomposizione:

$$C = E_1 \,.\, E_2 \dots E_m \,.\, F \,.\, E'_m \,.\, E'_{m-1} \dots E_1'$$

$$\text{con } E_r = \theta - \frac{1}{\alpha_r}\,,\quad E'_r = \theta - \frac{1}{\alpha_r}\,,\quad F = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2m \\ \theta - 1 & \text{se } n = 2m+1\,. \end{cases}$$

Se poniamo $Q = E_1 \,.\, E_2 \dots E_m$, $Q' = E'_m\, E'_{m-1} \dots E'_1$, si ha, per le formole (12), (13):

$$\theta^n \overline{Q} = \theta(\theta^{m-1}\, \overline{E}_m \theta^{-(m-1)})\, \theta(\theta^{m-2}\, \overline{E}_{m-1} \theta^{-(m-2)}) \dots \theta \overline{E}_1\,.$$

Ma

$$\theta(\theta^{r-1} \overline{E}_r\, \theta^{-(r-1)}) = 1 - \alpha_r \theta = -\alpha_r\left(\theta - \frac{1}{\alpha_r}\right) = -\alpha_r\, E_r'\,,$$

dunque

$$\theta^n \overline{Q} = (-1)^m\, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m Q'\,,\ \text{ e }\ Q' = \frac{(-1)^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}\, \theta^m \overline{Q}$$

ed allora, per la forma C equivalente alla sua aggiunta, ed a coefficienti costanti, si ha la decomposizione

$$(22) \qquad C = \frac{(-1)^m}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}\, Q \,.\, F \,.\, \theta^m \overline{Q}$$

(¹) Per il caso di $n = 3$ si veda la mia Nota: *Sui sistemi ricorrenti del 3° ordine* Rendiconti Circolo mat. di Palermo, t. V.

in cui è manifesta l'analogia con quelle che, per le forme differenziali, furono date dal Jacobi e dal Darboux.

11. È facile ora vedere che, reciprocamente, *se una forma alle differenze ammette la decomposizione*

$$(23)\quad C = c \,.\, Q \,.\, F \,.\, \theta^m \overline{Q}\,, \quad F = \begin{cases} 1 \text{ per } n = 2m \\ \theta - 1 \text{ per } n = 2m+1 \end{cases}, \; c \text{ costante,}$$

e se inoltre i coefficienti della Q *ammettono il periodo* $n - m$, *la forma* C *è equivalente alla sua aggiunta.*

Ed infatti si ha $\overline{C} = Q \,.\, \theta^{-m}\overline{F} \,.\, \overline{Q}$. Se $n = 2m$ ho

$$\theta^m \overline{C} = c_1(\theta^m Q \theta^{-m})\, \theta^m \overline{Q} = c_1 Q \,.\, \theta^m \overline{Q}\,.$$

E se $n = 2m + 1$, ho

$$\theta^{m+1} C = c(\theta^{-m+1}\overline{Q}\theta^{-(m+1)})\, \theta(\theta^m \overline{F} \theta^{-m})\, \theta^m \overline{Q} = c \,.\, Q \,.\, F \,.\, \theta^m \overline{Q}$$

in ogni modo ho sempre $\theta^{n-m}\overline{C} = c$C, con c costante per la operazione θ, che dimostra appunto l'asserto.

12. Non mi pare inutile finalmente far notare che le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte, ed i primi membri delle equazioni algebriche reciproche hanno egual formola di decomposizione. Ed infatti: se $F(y)$ è il primo membro di una equazione algebrica reciproca, si ha: $F(y) = G \pm y^m G_1$, e da questa, solo cambiando l'operazione di innalzamento a potenza r^{esimo}, con la operazione θ^r, si ha la formula $A(y) = G(y) \pm \theta^n \overline{G}(y)$, provata nella prima parte di questo studio.

Fisica. — *Studio sperimentale sopra la capacità dei condensatori* (¹). Nota dell'ing. FERDINANDO LORI, presentata dal Socio BLASERNA.

Le esperienze, che riferisco in questa Nota, hanno avuto per iscopo la determinazione, in diverse condizioni di carica, del rapporto fra la capacità di un condensatore, in cui il dielettrico fosse aria secca, e quella di un condensatore, in cui il dielettrico fosse carta paraffinata o mica od ebanite o vetro. Il circuito elettrico adoperato è quello della qui annessa figura, in cui C_1 C_2 sono i due condensatori, l'uno, quello che si vuole studiare, l'altro quello

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica tecnica della R. Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Roma.