ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

in cui è manifesta l'analogia con quelle che, per le forme differenziali, furono date dal Jacobi e dal Darboux.

11. È facile ora vedere che, reciprocamente, *se una forma alle differenze ammette la decomposizione*

$$(23)\quad C = c\,.\,Q\,.\,F\,.\,\theta^m\overline{Q}\,,\quad F = \begin{cases} 1 \text{ per } n = 2m \\ \theta - 1 \text{ per } n = 2m+1 \end{cases},\ c \text{ costante,}$$

e se inoltre i coefficienti della Q *ammettono il periodo* $n - m$, *la forma* C *è equivalente alla sua aggiunta.*

Ed infatti si ha $\overline{C} = Q\,.\,\theta^{-m}\overline{F}\,.\,\overline{Q}$. Se $n = 2m$ ho

$$\theta^m\overline{C} = c_1(\theta^m Q\theta^{-m})\,\theta^m\overline{Q} = c_1 Q\,.\,\theta^m\overline{Q}\,.$$

E se $n = 2m + 1$, ho

$$\theta^{m+1}C = c(\theta^{-m+1}\overline{Q}\theta^{-(m+1)})\,\theta(\theta^m\overline{F}\theta^{-m})\,\theta^m\overline{Q} = c\,.\,Q\,.\,F\,.\,\theta^m\overline{Q}$$

in ogni modo ho sempre $\theta^{n-m}\overline{C} = cC$, con c costante per la operazione θ, che dimostra appunto l'asserto.

12. Non mi pare inutile finalmente far notare che le forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte, ed i primi membri delle equazioni algebriche reciproche hanno egual formola di decomposizione. Ed infatti: se $F(y)$ è il primo membro di una equazione algebrica reciproca, si ha: $F(y) = G \pm y^m G_1$, e da questa, solo cambiando l'operazione di innalzamento a potenza r^{esimo}, con la operazione θ^r, si ha la formula $A(y) = G(y) \pm \theta^n\overline{G}(y)$, provata nella prima parte di questo studio.

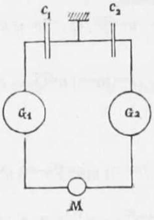
Fisica. — *Studio sperimentale sopra la capacità dei condensatori* (1). Nota dell'ing. FERDINANDO LORI, presentata dal Socio BLASERNA.

Le esperienze, che riferisco in questa Nota, hanno avuto per iscopo la determinazione, in diverse condizioni di carica, del rapporto fra la capacità di un condensatore, in cui il dielettrico fosse aria secca, e quella di un condensatore, in cui il dielettrico fosse carta paraffinata o mica od ebanite o vetro. Il circuito elettrico adoperato è quello della qui annessa figura, in cui C_1 C_2 sono i due condensatori, l'uno, quello che si vuole studiare, l'altro quello

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica tecnica della R. Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Roma.

ad aria: G_1 G_2 sono due galvanometri. che adoperavo come balistici, l'uno del tipo Siemens, a due bobine, con magnete a campana, l'altro del tipo Thomson, con quattro bobine, a magneti rettilinei; M una sfera metallica.

L'esperienza veniva condotta così: Toccando per un istante la sfera M con una delle armature di una bottiglia di Leyda, che era caricata da una macchina elettrostatica, e della quale l'altra armatura era in comunicazione



con la terra, io caricavo i due condensatori. La scarica della bottiglia si divideva in due parti attraverso i circuiti dei due condensatori: queste parti dovevano essere evidentemente proporzionali alla loro capacità, ed erano entrambe misurate dai due galvanometri. Supposta costante la capacità del condensatore ad aria, la lettura al galvanometro in comunicazione con esso era proporzionale alla differenza di potenziale creata fra le armature dell'altro condensatore, ed alla carica di queste era invece proporzionale la lettura all'altro galvanometro.

Il rapporto delle deviazioni massime dei due galvanometri risultò sempre costante, entro i limiti di precisione delle misure: può adunque concludersi che anche il rapporto fra le capacità dei due condensatori era costante. Le prove furono ripetute con condensatori di mica, di carta paraffinata, di ebanite, di vetro. Le differenze di potenziale raggiunte furono di circa 100 volta per la mica e per la carta paraffinata; circa 1000 volta per l'ebanite e pel vetro. Lo spessore del dielettrico era diverso nei diversi casi, e il campo in cui esso risultò immerso raggiunse per ogni condensatore circa $\pm$ 16 unità *c g s* del sistema elettrostatico. Tali limiti sono superiori a quelli raggiunti dagli altri sperimentatori, che hanno studiato lo stesso fenomeno.

Come esempio io riferisco qui appresso una serie di esperienze relative al condensatore di ebanite. Nella tabella le colonne di ordine pari contengono le letture fatte nel galvanometro in comunicazione col condensatore di ebanite, mentre quelle di ordine dispari contengono le letture fatte nel galvanometro in comunicazione col condensatore ad aria. I numeri rappresentano le divisioni delle scale.

88	88	79	79	68	68	171	170	54	53	74	74
118	117	71	71	49	49	161	166	46	48	73	75
41	42	72	91	69	70	118	123	45	46	109	111
155	160	66	66	64	64	136	141	96	98	64	65
92	90	90	90	74	73	42	42	52	52	71	70
59	58	68	68	53	53	82	82	46	46	53	53
87	85	92	90	68	69	51	51	73	73	67	68
153	150	70	70	82	81	75	74	76	76	51	51
78	78	94	95	90	90	—	—	—	—	68	68

Le due capacità del condensatore di ebanite e di quello ad aria, le costanti dei due galvanometri, e le distanze delle scale dagli specchi, si erano combinate per caso in modo che il rapporto fra le due letture fosse circa l' unità.

Quanto alla precisione delle misure, debbo osservare che lo zero del galvanometro di Thomson non si manteneva rigorosamente costante per difetto nella sospensione del sistema mobile, e che ambedue i galvanometri erano notevolmente disturbati dalla corrente delle tramvie elettriche della città, la quale imprimeva deviazioni balistiche anche di due intere parti della scala. Perciò l' errore probabile delle misure era dell' ordine delle differenze che si osservano fra i rapporti delle deviazioni dei due galvanometri, e può affermarsi che nei limiti di precisione delle misure la capacità del condensatore di ebanite è risultata costante.

Pei condensatori di mica e di carta paraffinata è accaduto esattamente lo stesso; solamente per quelli a vetro la legge non è stata verificata colla medesima esattezza, ed è apparsa qualche deviazione piccola, ma tutt' affatto irregolare. Io qui trascrivo senz' altro i rapporti fra le letture coi due galvanometri per tre serie di esperienze fatte col vetro, scelte fra quelle che presentano maggiori deviazioni dalla legge enunciata.

	1.61	1.31	1.50
	1.58	1.57	1.52
	1.62	1.53	1.53
	1.54	1.53	1.51
	1.52	1.54	1.54
	1.62	1.61	1.50
	1.50	1.50	1.54
	1.51	1.45	1.53
	1.53	—	—
	1.56	—	—
Medie . . .	1.549	1.506	1.521

Da tutto quanto ho qui riferito e da quanto ho scritto nella Nota precedente appare sufficientemente dimostrato che, entro i limiti di forza elettrica da me adoperati, e pei dielettrici da me studiati, il rapporto fra le quantità di elettricità che un condensatore riceve o abbandona durante una carica o scarica balistica e la variazione del suo potenziale per effetto della stessa carica o scarica è costante, intendendosi per balistica quella carica o scarica, che si compie in un tempo molto breve, come avviene quando le due armature sono riunite mediante un circuito elettrico di una piccola resistenza. Assumendo quel rapporto come misura della capacità, questa si deve ritenere costante, qualunque sia il momento della storia elettrica del condensatore, in cui essa viene misurata. E dalle mie esperienze sorge logica l'opportunità di assumere appunto come misura della capacità il rapporto, di cui ho parlato, modificando nel modo seguente l'ordinaria definizione:

Chiamasi capacità di un condensatore il rapporto fra la diminuzione o l'aumento della sua carica e la diminuzione o l'aumento del suo potenziale, che si ottengono durante una carica o una scarica balistica.

La parola capacità acquista in tal modo un significato preciso e il valore che ne deriva pel potere induttore specifico è costante, mentre la permeabilità magnetica delle sostanze magnetiche è per sua natura variabile. La capacità, che può dirsi apparente, che si ottiene facendo il quoziente della variazione di carica e della variazione di potenziale che si ottengono durante una carica, la quale duri un certo tempo, non molto breve, non è costante e dipende anche da questo tempo pel fenomeno della penetrazione della carica, mentre la permeabilità magnetica delle sostanze magnetiche non dipende mai dalla durata del fenomeno che si prende per base della misura.

Se l'isteresi elettrostatica, intesa nello stesso senso di quella magnetica, non esiste, i fenomeni studiati dallo Steinmetz e dall'Arnò di dissipazione di energia nei dielettrici, debbono essere attribuiti ad una causa diversa. Io appunto concluderò questo studio mostrando come una delle spiegazioni possibili, almeno qualitativamente, si ottenga considerando in un certo modo speciale il fenomeno della penetrazione della carica.

Farò il caso più semplice di un condensatore a facce piane e parallele, di superficie S, di capacità C, costituito da uno strato di dielettrico di spessore e, omogeneo, di potere induttore specifico ε, compreso fra due piani metallici, uno dei quali sia in comunicazione con la terra, e l'altro sia caricato ad un potenziale alternativo sinusoidale:

$$V = V_0 \, sen wt.$$

Tutti i punti di un piano parallelo a quelli che limitano il condensatore, collocato alla distanza $e - x$ da quello in comunicazione con la terra, e alla distanza x dall' altro, hanno nello stesso istante di tempo il potenziale comune:

$$V_x - \frac{e-x}{e} V_0 \, sen wt.$$

Tutti i punti di un piano parallelo al precedente, alla distanza dx da esso, hanno il potenziale:

$$V_{x+dx} = \frac{e-x-dx}{e} V_0 \, sen wt.$$

Lo strato infinitesimo di dielettrico compreso fra questi due piani costituirebbe un condensatore, il cui potenziale sarebbe in ogni istante:

$$V_x - V_{x+dx} = \frac{dx}{e} V_0 \, sen wt.$$

La capacità di questo condensatore sarebbe $C\frac{e}{dx}$: la quantità di elettricità delle sue armature sarebbe:

$$q = \pm C\frac{e}{dx}(V_x - V_{x+dx}) = \pm C \, V_0 \, sen wt.$$

Ora io suppongo che il fenomeno della penetrazione della carica possa essere rappresentato analiticamente, scrivendo la quantità q nel modo seguente:

$$q = \pm C \, V_0 \, sew \quad (wt - kx).$$

essendo k una quantità costante. Ammetto cioè che la polarizzazione provocata dalla carica dell' armatura che ricuopre il dielettrico, non si propaghi immediatamente fino all' armatura opposta, ma essa si propaghi con velocità finita per modo che esista in ogni molecola del dielettrico uno spostamento di fase fra il potenziale e la polarizzazione, e questo spostamento di fase aumenti coll' aumentare della distanza della molecola polarizzata dall' armatura del condensatore che subisce la carica e provoca la polarizzazione.

Il lavoro di elettrizzazione dello strato infinitesimo che consideriamo durante il periodo $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ è:

$$dL = \int_{t=0}^{t=\tau} q \frac{\partial}{\partial t}(V_x - V_{x+dx}) \, dt = \int_{t-0}^{t=\tau} \frac{\omega C V_0^2}{e} dx \, \mathrm{sen}(wt - kx) \cos wt \, dt \, .$$

E l' energia dissipata durante l' elettrizzazione è:

$$dW = \frac{1}{\tau}\int_{t=0}^{t=\tau} \frac{w C V_0^2}{e} \mathrm{sen}\,(wt - kx) \cos wt \, dt = -\frac{\omega C V_0^2}{2e} \mathrm{sen}\, kx \, dx \, .$$

L'energia dissipata da tutto il condensatore è:

$$W = -\int_{x=0}^{x=e} \frac{\omega C V_0^2}{2e} \operatorname{sen} kx \, dx = \frac{\omega C V_0^2}{ke} \operatorname{sen} \frac{2ke}{2}$$

Trascurando le potenze del prodotto ke superiori alla terza, si può scrivere:

$$W = \frac{\omega C V_0^2 ke}{4}.$$

Se si indica con v la velocità con cui si propaga la polarizzazione, il tempo dopo il quale essa giunge alla distanza xv è $t_0 = \frac{x}{v}$.

Dalle nostre formole risulta:

$$\omega t_0 = kx = \frac{\omega x}{v}:$$

donde:

$$k = \frac{\omega}{v}.$$

Chiamando n il numero di alternazioni del potenziale al secondo è $\omega = 2\pi n$; e, sostituendo a k ed ω nell'ultima espressione di W i loro valori:

$$k = \frac{\omega}{v} \qquad \omega = 2\pi n,$$

si ottiene:

$$W = \frac{\pi^2 C V_0^2 n^2 e}{v}.$$

Essendo: $C = \frac{S\varepsilon}{4\pi e}$, si può anche scrivere:

$$W = \frac{\pi \varepsilon S V_0^2 n^2}{4v}.$$

La perdita di energia per centimetro cubo risulta così:

$$(1) \quad W^1 = \frac{\pi \varepsilon V_0^2 n^2}{4ve}.$$

I dielettrici adunque, che presentano il fenomeno della penetrazione della carica, debbono presentare anche quello della dissipazione dell'energia durante una elettrizzazione alternativa.

Le esperienze, già da me citate, dello Steinmetz, il quale ha misurato con l'elettrodinamometro l'energia della corrente alternativa attraversante il circuito di un condensatore, confermano che l'energia stessa sia proporzionale al quadrato della differenza massima di potenziale V_0. Allo stesso risultato non conducono quelle dell'Arnò, ma il campo da lui adoperato non era uniforme, e quindi esse non possono considerarsi come una contradizione definitiva colla formola (1). Non conosco esperienze, le quali mostrino la variazione di W in funzione di n e di e. Esse sarebbero molto importanti. Ma al mio ragionamento per ora non attribuisco altro scopo, che quello di dimostrare come i fenomeni di dissipazione di energia nei dielettrici, i quali sono di esistenza indiscutibile, debbono e possono essere spiegati indipendentemente da un fenomeno di vera isteresi elettrostatica contro la esistenza del quale stanno le mie esperienze.

Ho intanto iniziato una serie di ricerche per istudiare la variazione di W_1 in funzione di n.

Fisica. — *La conduttività termica nelle rocce della campagna romana. Misura dei calori specifici e delle densità* [1]. Nota del dott. Francesco Morano, presentata dal Socio Blaserna.

Ho istituito alcune ricerche per determinare la conduttività termica nelle principali rocce della campagna romana. A tal uopo ho preferito di dare ai campioni da me studiati la forma di un disco che suppongo di dimensioni finite: ne sia d l'altezza e ϱ il raggio. Se il movimento del calore vi procede simmetricamente all'asse, la temperatura ϑ per ogni punto di esso disco è una funzione delle sue coordinate geometriche x ed r e del tempo t, e l'equazione di propagazione è:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \qquad (\alpha)$$

dove: $a^2 = \dfrac{k}{c\delta}$;

k è il coefficiente di conduttività interna;

c il calore specifico;

δ la densità.

Chiamando inoltre h il coefficiente di conduttività esterna, le condizioni di esperienza davano luogo alle seguenti equazioni:

$$\text{per } x = d \qquad k\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = h\vartheta \qquad (\beta)$$

$$\text{per } r = \varrho \qquad k\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = h\vartheta \qquad (\gamma)$$

$$\text{per } x = 0 \qquad \vartheta = \vartheta_0 \qquad (\delta)$$

$$\text{per } t = 0 \qquad \vartheta = 0 \qquad (\varepsilon)$$

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.