ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

vrebbe essere assai più leggero dell'idrogeno; questa riga sin qui non era mai stata riscontrata in nessun prodotto terrestre. Oltre questa riga vi abbiamo poi riscontrate le seguenti: 653,5-595,5-536-2; e nello spettro dei gas di alcune fumarole del Vesuvio che pure contengono argo oltre la 595,5 abbiamo osservate le altre 769.5-631.8-572.5-536.5-441.5. Tutte queste righe non appartengono nè allo spettro dell'argo, nè a quello dell'elio: non presentano coincidenze o vicinanze che con alcune, poco importanti, di qualche elemento, come il ferro, il potassio, il titanio, la cui presenza non è affatto probabile nei gas da noi studiati e nelle condizioni in cui abbiamo esperimentato: qualche vicinanza o coincidenza vi sarebbe con alcune righe del mercurio osservate da Eder e Valenta, ma non avendo noi visto le righe le più brillanti di questo elemento e d'altra parte non essendoci mai apparse, in tante centinaia di osservazioni che abbiamo fatto, le righe di cui abbiamo parlato, così non crediamo che esse possano avere questa origine: la riga 572.5 è vicina a una di quelle dello spettro in righe dall'azoto, ma non crediamo che possa ad esso attribuirsi, giacchè sarebbe la sola che comparisce. Noi riteniamo assai probabile che si tratti, oltre che del coronio, di altri nuovi elementi gassosi e stiamo attivamente continuando i nostri studi, entro quei limiti che ci vengono imposti pur troppo dalla mancanza dei mezzi che sarebbero necessarî per condurre a termine con sicurezza questo lavoro.

Matematica. — *Le operazioni equivalenti alle loro aggiunte.* Nota del dott. E. Bortolotti, presentata dal Socio V. Cerruti.

Fra le teorie che nella Analisi matematica si presentano col maggior numero di caratteri fondamentali comuni e delle quali gli sviluppi possono, in qualche modo, essere considerati come paralleli, sono notevolissime quelle del calcolo infinitesimale e del calcolo alle differenze. La relazione fra queste teorie appare manifesta (come nota il Lacroix) (1) considerando che il calcolo differenziale può essere fondato sullo sviluppo delle funzioni in serie, il calcolo integrale fa conoscere nuove funzioni che non possono esprimersi che per mezzo di serie, ed il calcolo alle differenze, che nasce dalla considerazione generale delle serie, comprende il calcolo infinitesimale come caso speciale.

Sia nell'una che nell'altra di queste teorie, si presentano quistioni di egual natura, e la loro risoluzione può tentarsi con metodi al tutto simili. Mentre però, nel calcolo infinitesimale, l'applicazione di questi metodi si può sempre fare con la massima facilità e speditezza, in quello alle differenze vien complicata per la presenza di elementi che non si possono più

(1) *Traité du Calcul*, pag. 44 della Prefazione (edizione del 1810).

considerare come trascurabili, e per la distinzione del senso in cui si può supporre che avvengano gli incrementi della variabile a cui corrispondono le differenze finite della funzione.

In un recente lavoro *sulle forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte* (¹) ho avuto occasione di notare (e credo per la prima volta) le contraddizioni a cui potrebbe condurre questo calcolo quando non fosse ben valutato il diverso significato che hanno le espressioni formate linearmente con le successive potenze dell'uno o dell'altro dei due simboli: $\theta\varphi = \varphi(x + \varDelta x)$ $\theta^{-1}\varphi = \varphi(x - \varDelta x)$.

Basta poi solo pensare al fatto che la formula di moltiplicazione per la operazione $\varDelta\varphi = \theta\varphi - \varphi$ è a tre termini, che le funzioni che formano oggetto di questi studî non sono definite che in gruppi discreti di punti, e, considerate in campi continui, possono in generale essere discontinue e multiformi, per avere idea delle difficoltà che si presentano nello studio di questioni di qualche generalità, pertinenti al calcolo alle differenze. Così ancora si spiega perchè tali questioni, in questi ultimi tempi, sieno state poste in disparte nonostante che tutti ne riconoscano la grandissima importanza.

Molta parte però degli ostacoli, cui abbiamo accennato, può essere facilmente rimossa tenendo via diversa da quella fino ad ora seguita, e cioè riguardando il calcolo alle differenze come una specializzazione della teoria generale delle operazioni distributive, anzichè considerarlo come una generalizzazione del calcolo infinitesimale.

Il notevole sviluppo, che quelle teorie generali hanno avuto in questi ultimi anni, permettono di tentare questa nuova strada, ed io qui mi propongo di darne un esempio cercando le proprietà generali delle operazioni distributive coincidenti con le loro aggiunte, e mostrando come da queste si potrebbe partire per uno studio sistematico delle forme lineari alle differenze.

1. In una Nota: *Sulla operazione aggiunta* (²) il prof. Pincherle indica col simbolo

$$(\varphi , f)$$

una operazione, definita in modo qualunque, che applicata a due funzioni analitiche $\varphi(x)$, $f(z)$, appartenenti a determinate classi S, S′, dà per risultato due funzioni analitiche delle stesse classi, che è distributiva tanto rispetto ad f quanto rispetto a φ, che non fa mai corrispondere una stessa coppia di funzioni a due coppie distinte, e che ha la proprietà caratteristica

$$(x\varphi , f) = (\varphi , zf) .$$

Intendendo poi di considerare solo quelle operazioni distributive che applicate a funzioni di S od S′ danno risultati che sono contenuti in S od S′, rispettivamente, dice che *una operazione distributiva* $\bar{\mathrm{A}}$ *applicabile alle*

(¹) Questi Rendiconti, fascicoli del 1° maggio e del 17 luglio 1898.

(²) Rendiconti Acc. di Bologna, Seduta del 17 aprile 1898.

funzioni di S' è aggiunta della operazione distributiva ed a determinazione unica A *applicata alle funzioni di* S, *quando è identicamente*:

$$(1) \qquad \big(\mathrm{A}(\varphi), f\big) = \big(\varphi, \overline{\mathrm{A}}(f)\big).$$

Questa definizione comprende quelle, che ordinariamente si danno, di forme lineari, differenziali od alle differenze, aggiunte di forme date, come casi particolarissimi, e le proprietà generali, e le relazioni reciproche di due operazioni aggiunte, sono analoghe a quelle che furono trovate in quei casi speciali.

2. Se vogliamo che la operazione A coincida con la sua aggiunta, dobbiamo anzitutto supporre che essa sia applicabile sia alle funzioni di S che a quelle di S', ed in secondo luogo dobbiamo ammettere che gli sviluppi in serie di potenze di D:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{A}(\varphi) = \sum \dfrac{\alpha_n(x)}{n!} \mathrm{D}^n \varphi \\ \overline{\mathrm{A}}(\varphi) = \sum \dfrac{(-1)^n}{n!} \mathrm{D}^n\big(\alpha_n(x) . \varphi\big) \end{cases} \quad (^1)$$

non differiscano che per un fattore costante k.

La condizione per la coincidenza di una data operazione con la sua aggiunta può dunque essere espressa con le relazioni identiche:

$$k\,(-1)^n\, \alpha_n(x)\, \mathrm{D}^n(\varphi) = \mathrm{D}^n\big(\alpha_n(x) . \varphi\big).$$

O dalle altre:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{D}\big(\alpha_n(x)\big) = 0 \\ \alpha_n = k\,(-1)^n\, \alpha_n . \end{cases}$$

Occorre cioè che tutte le α_n, *nello sviluppo* (2), *sieno costanti per la operazione* D, *ed il fattore* k *deve essere eguale a* ± 1.

Di qui ne viene che *si possono distinguere due tipi di operazioni coincidenti con le loro aggiunte:*

Diremo *del primo tipo* quelle che corrispondono a $k = 1$ e sono *direttamente eguali alle loro aggiunte* poichè, dalle (2) e (3), si ha identicamente:

$$(4) \qquad \mathrm{A}(\varphi) = \overline{\mathrm{A}}(\varphi).$$

Gli sviluppi in serie di potenze di D per queste operazioni sono della forma

$$(5) \qquad \mathrm{A}(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m}}{2m!} \mathrm{D}^{2m}(\varphi).$$

(1) Cfr. Pincherle, *Mém. sur le calcul fonctionnel*, § 77. (Mat. Ann., Bd. 49); *Sulla Op. Aggiunta*, n. 10.

Donde:

$$(6)\qquad \mathrm{A}(\varphi) = \mathrm{A}(-\varphi)$$

e per la (φf), e per le A di questo tipo, si ha:

$$(7)\qquad \big(\mathrm{A}(\varphi), \varphi\big) = \big(\varphi, \mathrm{A}(\varphi)\big).$$

Diremo *del secondo tipo* quelle che corrispondono a $k = -1$ e *sono eguali, ma di segno contrario* alle loro aggiunte. Per queste si ha dunque identicamente:

$$(8)\qquad \mathrm{A}(\varphi) = -\overline{\mathrm{A}}(\varphi)$$

e si hanno sviluppi della forma:

$$(9)\qquad \mathrm{A}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{(2m+1)!}\,\mathrm{D}^{2m+1}(\varphi).$$

Di qui si deduce:

$$(10)\qquad \mathrm{A}(-\varphi) = -\mathrm{A}(\varphi) = \overline{\mathrm{A}}(\varphi).$$

Per la operazione (φ, f) e per le A di questo tipo, si ha:

$$(11)\qquad \big(\mathrm{A}(\varphi), \varphi\big) = \big(\varphi, \mathrm{A}(-\varphi)\big).$$

3. Al numero 6 della Nota citata il Pincherle ha dimostrato che: *Se* $\overline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{C}}, \ldots \overline{\mathrm{X}}$, *sono le aggiunte di* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots \mathrm{X}$, *rispettivamente, e si ha* $\mathrm{X} = \mathrm{A}.\mathrm{B}.\mathrm{C}\ldots$, *si ha ancora*: $\overline{\mathrm{X}} = \cdots \overline{\mathrm{C}}.\overline{\mathrm{B}}.\overline{\mathrm{A}}$. Ne segue che: *La aggiunta della potenza n^{esima} di una operazione distributiva a determinazione unica* A, *è la potenza n^{esima} della aggiunta.*

Da ciò, e da quanto si è visto al numero precedente si deduce che:

Se la operazione A *coincidente con la sua aggiunta è del primo tipo, e se, per qualunque funzione* φ, *si ha*:

$$\mathrm{A}\, a_r\, \varphi = a_r\, \mathrm{A}(\varphi)\ (r = 0, 1, \ldots m),$$

anche tutte le operazioni della forma:

$$(12)\qquad \mathrm{B} = a_0 + a_1 \mathrm{A} + a_2 \mathrm{A}^2 + \cdots + a_m \mathrm{A}^m,$$

sono del primo tipo.

Se poi la operazione A *è del secondo tipo, le operazioni*:

$$(13)\qquad \mathrm{B}_1 = a_0 + a_2 \mathrm{A}^2 + \cdots + a_{2m} \mathrm{A}^{2m}$$

sono del primo tipo, e le operazioni:

$$(14)\qquad \mathrm{B}_2 = a_1 \mathrm{A} + a_3 \mathrm{A}^3 + \cdots + a_{2m+1} \mathrm{A}^{2m+1}$$

sono del secondo tipo.

4. Mostriamo ora come si possano effettivamente formare delle operazioni coincidenti con le loro aggiunte e dei tipi considerati.

Partiamo perciò da una operazione A_1 distributiva ed a determinazione unica definita dallo sviluppo

$$A_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} D^n(\varphi) \tag{15}$$

dove tutte le a_n sono periodi della D, e sono inoltre tali che anche la operazione:

$$A_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n!} D^n(\varphi) \tag{16}$$

è distributiva, a determinazione unica ed applicabile alle funzioni della classe S.

Si scorge immediatamente che la operazione:

$$C_1 = A_1 + A_2 = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{2m}}{2m!} D^{2m}(\varphi) \tag{17}$$

è direttamente eguale alla sua aggiunta, e che la operazione

$$C_2 = A_1 - A_2 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{(2m+1)!} D^{2m+1}(\varphi) \tag{18}$$

è eguale alla contraria, in segno, della sua aggiunta.

5. In particolare, per $a_n = a^n$, si ha

$$A_1(\varphi) = \varphi(x+a) \qquad A_2(\varphi) = \varphi(x-a)\,,$$

posto $\Delta x = a$, si ha ancora

$$A_1(\varphi) = \theta\varphi \quad , \quad A_2(\varphi) = \theta^{-1}\varphi\,.$$

Da cui si vede che sono direttamente eguali alle loro aggiunte le operazioni:

$$B_1 = a_0\varphi + a_1(\theta + \theta^{-1})\varphi + a_2(\theta^2 + \theta^{-2})\varphi + \cdots + a_m(\theta^m + \theta^{-m})\varphi$$

che potremo anche scrivere:

$$B_1 = a_0\varphi + a_1\,\theta\varphi + \cdots + a_m\,\theta^m\varphi + a_0\varphi + a_1\,\theta^{-1}\varphi + \cdots + a_m\,\theta^{-m}\varphi\,.$$

Questa è una forma lineare alle differenze in cui entrano potenze positive e potenze negative di θ. Facendo il prodotto di questa per θ^m abbiamo la forma:

$$C_1 = \theta^m B_1 = a_m\,\theta^{2m} + a_{m-1}\,\theta^{2m-1} + \dots + 2a_0\,\theta^m + \dots + a_{m-1}\theta + a_m$$

che contiene sole potenze positive di θ e che, non è eguale, ma è soltanto equivalente alla sua aggiunta.

Se poniamo

$$a_0\theta^m + a_1\theta^{m-1} + \cdots + a_m = \mathrm{G}$$

abbiamo

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{G} + \theta^{2m}\mathrm{G}$$

che, come è noto [1], è la espressione caratteristica delle forme di grado pari equivalenti alle loro aggiunte.

Similmente si ha dalla (18) la forma:

$$(20)\quad \mathrm{B}_2 = a_1\theta + a_3\theta^3 + \cdots + a_{2m+1}\theta^{2m+1} - a_1\theta^{-1} - a_3\theta^{-3} - \cdots - a_{2m+1}\theta^{-(2m+1)}$$

che è eguale alla contraria, nel segno, della sua aggiunta.

La forma:

$$\mathrm{C}_2 = \theta^{2m+1}\mathrm{B}_2 =$$

$$= a_{2m+1}\theta^{4m+2} + a_{2m-1}\theta^{4m} + \cdots + a_1\theta^{2m+2} - a_1\theta^{2m} - a_3\theta^{2m-2} - \cdots - a_{2m+1}$$

con la trasformazione di variabile $\theta^2 x = \theta y$, si riduce nella:

$$\mathrm{C}_2 = a_{2m+1}\theta^{2m+1} + a_{2m-1}\theta^{2m} + \cdots + a_1\theta^{m+1} - a_1\theta^m - a_3\theta^{m-1} - \cdots - a_{2m+1}.$$

Se qui pongo $-\mathrm{G} = a_1\theta^m + a_3\theta^{m-1} + \cdots + a_{2m+1}$ ho la espressione

$$\mathrm{C}_2 = \mathrm{G} - \theta^{2m+1}\overline{\mathrm{G}}$$

che è caratteristica delle forme lineari alle differenze di grado dispari equivalenti con le loro aggiunte [2].

6. Ammettiamo ora che gli elementi φ di S sieno le serie di potenze intere positive della variabile x convergenti entro un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio superiore ad un numero positivo r; e che gli elementi f di S′ sieno le serie di potenze intere e negative di x convergenti fuori di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio inferiore ad r.

Seguendo le idee svolte dal prof. Pincherle nei suoi ultimi lavori, dovremo considerare gli elementi φ come *punti*, e gli elementi f come *piani* nello spazio ad infinite dimensioni.

Se la operazione A deve coincidere con la sua aggiunta bisogna anzitutto che applicata a punti dello spazio S riproduca punti dello stesso spazio, e che trasformi i piani di S′ in piani di questo spazio. Si consideri poi che una operazione $\mathrm{A}(\varphi)$ può essere definita mediante i punti che essa fa corrispondere alle potenze della variabile x cioè dalla:

$$(21)\qquad \mathrm{A}(x^n) = a_{n.0} + a_{n.1}x + a_{n.2}x^2 + \cdots,$$

[1] Cfr. il n. 12 della Nota citata: *Sulle forme lineari alle differenze equivalenti alle loro aggiunte.*

[2] Loc. cit. formule (36).

o dal quadro dei coefficienti:

$$(Q)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{0.0}\ ,\ a_{0.1}\ ,\ a_{0.2}\ ,\dots \\ a_{1.0}\ ,\ a_{1.1}\ ,\ a_{1.2}\ ,\dots \\ a_{2.0}\ ,\ a_{2.1}\ ,\ a_{2.2}\ ,\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Si ricordi infine che il Pincherle ha trovato [1] ancora che, se come definizione della operazione (φ, f), si prende il residuo, per $x = 0$, di $f(x).\varphi(x)$, cioè $\frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \varphi(x).f(x)\,dx$, la operazione $\overline{\mathrm{A}}$ è data dalla relazione:

$$\int_{(r)} \mathrm{A}(\varphi).f(x)\,dx = \int_{(r)} \varphi(x)\,\overline{\mathrm{A}}\big(f(x)\big)\,dx\,,$$

e per essa si ha il quadro:

$$(Q')\qquad \left\{\begin{array}{l} a_{0.0}\ ,\ a_{1.0}\ ,\ a_{2.0}\ ,\dots \\ a_{0.1}\ ,\ a_{1.1}\ ,\ a_{2.1}\ ,\dots \\ a_{0.2}\ ,\ a_{1.2}\ ,\ a_{2.2}\ ,\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

che si ottiene da Q cambiando le linee in colonne.

Si scorge allora che: a) *La aggiunta della aggiunta è la operazione primitiva.* b) *Le operazioni*: $\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}.\overline{\mathrm{B}}$, $\mathrm{A}_2 = \overline{\mathrm{B}}.\mathrm{B}$, *coincidono con le loro aggiunte.* c) *La condizione perchè una operazione coincida con la sua aggiunta è che il quadro* (Q), *ad essa relativo, sia simmetrico rispetto alla diagonale principale.*

Segue da c) che: se tutti gli elementi a sinistra di una parallela alla diagonale principale sono nulli identicamente, sono nulli anche tutti quelli a destra della parallela simmetrica, da cui si deduce [2]: *Nelle operazioni coincidenti con le loro aggiunte le degenerescenze del primo e del secondo genere si trovano sempre accompagnate.*

7. La operazione che il Pincherle chiama *normale* e che è definita da

$$\mathrm{N}(x^n) = a_n\, x^n$$

o dal quadro:

$$(Q)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0\quad 0\quad 0\ \dots \\ 0\quad a_1\quad 0\ \dots \\ 0\quad 0\quad a_2\ \dots \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

è forse l'esempio più semplice di operazione coincidente con la sua aggiunta.

(1) *La operazione aggiunta*, n. 14.

(2) Cfr. Pincherle, *Appunti di calcolo funzionale*. Rend. Ist. Lomb., 15 luglio 1897; Rendiconti Acc. di Bologna, 30 gennaio e 17 aprile 1898.

La espressione di una forma alle differenze per mezzo del suo quadro Q cambia secondo che si intende che la variabile indipendente, rispetto a θ, sia la x, o sia il numero d'ordine n dei termini della serie di potenze che definisce la funzione $\varphi(x)$. Le proprietà formali della operazione rimangono però le stesse in entrambi i casi.

Nel primo caso infatti si ha:

$$\text{(22)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{A}(x^n) &= a_0 x^n + a_1(x+1)^n + \cdots + a_m(x+m)^m \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k} \sum_{h=0}^{m} h^{n-k} a_h \end{aligned}$$

Dunque.

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} a_{nk} = \binom{n}{k} \sum\limits_{h=0}^{m} h^{n-k} a_h & k = 0, 1 \dots n \\ a_{nk} = 0, & k > n. \end{cases}$$

$$\text{(Q)} \qquad \begin{cases} 1, & 0, & 0, \dots \\ \sum h a_h & \sum a_h & 0, \dots \\ \sum h^2 a_h & 2\sum h a_h & 0, \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

Per la coincidenza della A con la $\overline{\mathrm{A}}$ dovremmo dunque avere:

$$\text{(24)} \qquad \binom{n}{k} \sum_{h=0}^{m} h^{n-k} a = 0, \qquad n \neq h.$$

Si vede facilmente di qui che si avrebbe identicamente

$$\text{(25)} \qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_m = o_0$$

e la A si ridurrebbe alla operazione normale:

$$\text{(26)} \qquad \mathrm{N} x^n = a_0(x) x^n.$$

La ricerca delle forme che coincidono con il prodotto della loro aggiunta per una determinata potenza della θ si fa meglio ponendosi nel secondo caso, considerando cioè la operazione θ riferita agli indici dei termini delle serie da studiare.

La operazione A è così definita dalla relazione:

$$\text{(27)} \qquad \mathrm{A}(x^n) = x^n \Big(a_0(x)\, x^m + a_1(x)\, x^{m-1} + \cdots + a_m(x) \Big)$$

ed è quella stessa studiata dal Pincherle nella sua Nota: *Di una estensione del concetto di divisibilità per un polinomio* (¹).

(¹) Questi Rendiconti, seduta del 3 aprile 1898.

Il quadro di questa operazione:

$$
(\mathrm{Q}) \qquad \begin{cases} a_0(0)\ ,\ a_1(0)\ ,\ a_2(0) \dots a_m(0)\ ,\ 0\ ,\ 0 \dots\dots\dots \\ 0\ ,\ a_0(1)\ ,\ a_1(1) \dots a_{m-1}(1)\ ,\ a_m(1)\ ,\ 0 \dots\dots\dots \\ 0\ ,\ 0\ ,\ a_0(2) \dots a_{m-2}(2)\ ,\ a_{m-1}(2)\ ,\ a_m(2) \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

è quella matrice che ho sempre indicato con **M** e che ho spesso avuto bisogno di considerare nei miei studî sulle forme alle differenze.

Questo quadro non può manifestamente coincidere con Q′ se non sono zero tutti gli elementi non situati sulla diagonale principale. Il che conferma quanto abbiamo più volte notato e cioè che: *Una forma lineare alle differenze in cui entrino potenze di θ tutte del medesimo segno, non può coincidere con la sua aggiunta senza ridursi ad una operazione Normale.*

Se vogliamo poi paragonare la A con la operazione θ^rA; per formare il quadro di quest'ultima basta togliere dal quadro (Q′) le prime r linee e si ha così:

$$
(\mathrm{Q}'') \qquad \begin{cases} a_{r.0}(0)\ ,\ a_{r-1}(1)\ ,\ a_{r-2}(2)\ ,\ \dots\ ,\ a_0(m-r)\ ,\ 0\ ,\ \dots \\ a_{r+1}(0)\ ,\ a_r(1)\ ,\ a_{r-1}(2)\ ,\ \dots\ ,\ a_1(m-r)\ ,\ a_0(m-r+1)\ ,\ \dots \\ a_{r+2}(0)\ ,\ a_{r+1}(1)\ ,\ a_r\ (2)\ ,\ \dots\ ,\ a_2(m-r)\ ,\ a_1(m-r+1)\ ,\ \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

Perchè questo quadro (fatta astrazione dal fattore ± 1) coincida con (Q), dovranno anzitutto essere nulli tutti i coefficienti $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots a_m$, e la forma A non potrà essere di grado superiore ad r. Supponendo perciò $r \geqq m$, avremo le relazioni di condizione:

$$
(28) \qquad \pm a_s = \theta^s a_{r-s} \qquad s = 0\,, 1 \dots m
$$

che, per $m = r$, coincidono con quelle trovate ai nn. 11 e 12 della Nota citata sulle forme equivalenti allo loro aggiunte.

Per non allungare di troppo questa Nota, finirò col riportare lo sviluppo in serie di D:

$$
\mathrm{A}(\varphi) = \sum_{p=1}^{m} (\Delta^p a_1 x + \Delta^p a_2 x^2 + \cdots - \Delta^p a_{m-1} x^{m-1}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^{sm+p}}{(sm+p)!} \mathrm{D}^{sm+p}\big(\varphi(x)\big)
$$

che, dalle (27) e (28), risultano per le forme A(φ) che sono coincidenti con $(-1)^m \theta^r \overline{\mathrm{A}}(\varphi)$.