

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCV.

1898

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VII.

2° SEMESTRE



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1898

Fisica. — *La conduttività termica esterna ed interna nelle rocce della campagna romana e l'andamento della temperatura nel suolo* (1). Nota del dott. FRANCESCO MORANO, presentata dal Socio BLASERNA.

In altra Nota precedente (2) mi ero proposto di determinare la conduttività termica nelle rocce della campagna romana. Avendo prescelto di dare ai miei campioni la forma di disco le formole ivi dedotte pel calcolo numerico erano:

$$k = \frac{c\delta}{(\alpha^2 + \beta^2)t} \operatorname{lognat} \frac{\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}_2} \quad (\iota)$$

$$\alpha = \frac{h}{k} \operatorname{tg} \alpha d \quad (\theta)$$

$$\beta = - \frac{h}{k} \frac{J_0(\beta \varrho)}{J_1(\beta \varrho)} \quad (\omega)$$

Se ne inferisce essere necessario pel calcolo di k di conoscere precedentemente il calore specifico, la densità e la conduttività esterna.

Nell'altra Nota esposi i risultati delle mie esperienze per la determinazione dei calori specifici e delle densità. Ora dirò la via da me seguita ed i risultati da me ottenuti nella ricerca della conduttività termica esterna ed interna. Aggiungerò in forma di appendice alcune mie deduzioni sull'andamento annuo e diurno della temperatura nel suolo.

Conduttività esterna. — Per determinare la conduttività esterna di una sostanza ne prendo un certo volume V la cui superficie sia S , e dopo di averlo portato ad una temperatura \mathcal{J}_1 lo lascio raffreddare durante un tempo t in un ambiente la cui temperatura chiamo zero. Se la conduttività interna è grande rispetto all'esterna, la quantità di calore ceduta dal corpo all'ambiente durante un tempo dt è proporzionale alla temperatura media \mathcal{J}_c posseduta dal corpo durante quel tempo, alla sua superficie ed al tempo stesso, ossia

$$c \delta V d\mathcal{J}_c = - h \mathcal{J}_c S dt \quad (a)$$

dove h è il coefficiente di proporzionalità ossia la conduttività esterna. Anche nel caso che la conduttività interna non sia molto grande rispetto all'esterna, quest'ultima eguaglianza è sostenuta se si dà alla t un valore discretamente piccolo. Integrando la (a) si ottiene

$$\mathcal{J}_c = \mathcal{J}_1 e^{-\frac{h}{c\delta} \frac{S}{V} t}$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico di Roma.

(2) Vedi questi Rendiconti, 2° sem., 1898, pag. 61.

donde ricavo

$$h = \frac{c \delta V}{t S} \lognat \frac{\vartheta_1 - \vartheta_a}{\vartheta_c - \vartheta_a} \quad (b)$$

avendo introdotto la temperatura dell'ambiente ϑ_a .

Le esperienze vennero eseguite col medesimo apparecchio di Regnault che si adopera pei calori specifici. Il corpo prendeva nella stufa la temperatura ϑ_1 e quindi era esposto alla temperatura dell'ambiente durante un certo tempo. La temperatura media ϑ_c del corpo alla fine di questo tempo veniva determinata immergendo immediatamente il corpo nel calorimetro. È chiaro che sarà:

$$\vartheta_c = \vartheta + \frac{H}{\rho c} (\vartheta - \vartheta_0 + \delta \vartheta) \quad (c)$$

adoperando le stesse notazioni che pei calori specifici.

Le dimensioni geometriche, trattandosi dei medesimi dischi adoperati per misurare le densità (Serie I) (1), venivano determinate nel modo seguente. Il volume può dedursi da quelle stesse esperienze essendo

$$V = \frac{\rho_2 - \rho_1}{a}$$

L'altezza d veniva misurata con una vite micrometrica in vari punti del disco, donde deducevo la media. Il raggio e la superficie venivano calcolati dai precedenti elementi essendo

$$e = \sqrt{\frac{V}{\pi d}}$$

$$S = 2\pi e(e + d).$$

Ecco i valori ottenuti:

Dimensioni geometriche.

	V	d	e	S
Calcarea	13.463	1.03	2.04	39.346
Tartaro	13.273	1.02	2.04	38.061
Travertino	12.934	1.00	2.03	38.700
Lava	12.933	1.04	1.99	37.873
Trachite	10.801	0.97	1.88	33.760
Peperino	13.512	1.04	2.03	39.237
Terracotta	12.588	0.98	2.02	38.082
Tufo	10.981	0.98	1.89	34.064

Nella seguente tabella scrivo tutti i valori relativi alle (c) e (b). Le p sono le medesime p_1 che compariscono nella tabella delle densità (Serie I) (2).

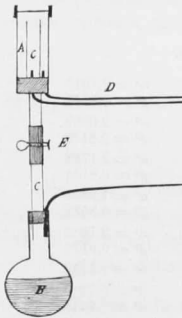
(1) Nota precedente citata.

(2) Ibid.

Tabella relativa alla conduttività esterna.

	<i>t</i>	<i>II</i>	ϑ_0	ϑ	$\delta\vartheta$	ϑ_c	ϑ_a	ϑ_1	<i>h</i>	Medie	
Calcare	60 ^s	204.514	15.10	17.92	0.02	91.83	15.5	99.30	0,000311	} <i>h</i> =0.000 355	
	90		16.01	18.60	0.02	86.52	16.0	98.81			357
	120		16.11	18.50	0.04	81.74	16.0	99.51			398
Tartaro	60	"	15.51	18.00	0.04	89.69	16.0	99.36	380	} <i>h</i> =0.000 382	
	90		16.10	18.40	0.04	84.71	16.0	98.81			383
	120		16.30	18.47	0.03	80.81	16.0	99.13			383
Travert.	60	"	14.60	17.21	0.00	90.40	16.0	99.31	355	} <i>h</i> =0.000 377	
	90		15.70	18.05	0.03	84.79	15.5	98.81			386
	120		17.11	19.27	0.04	80.96	16.5	99.13			390
Lava	60	"	15.72	18.18	0.11	92.79	16.0	99.31	253	} <i>h</i> =0.000 296	
	90		15.33	17.70	0.04	87.96	15.0	98.81			295
	120		16.15	18.33	0.04	82.78	16.0	99.13			339
Trachite	60	"	15.00	16.80	0.00	91.04	15.0	99.27	252	} <i>h</i> =0.000 335	
	90		17.38	18.90	0.03	82.83	17.0	99.05			360
	120		16.61	17.98	0.04	76.13	16.0	98.90			393
Peperino	60	"	14.95	17.29	0.08	90.84	15.0	99.16	296	} <i>h</i> =0.000 383	
	90		17.10	19.18	0.07	84.53	16.5	99.05			369
	120		16.44	18.21	0.10	75.05	16.0	98.81			485
Terrac.	60	"	16.04	17.74	0.03	87.62	15.5	99.30	333	} <i>h</i> =0.000 373	
	90		17.13	18.67	0.04	82.49	17.0	99.05			341
	120		16.49	17.78	0.04	71.50	16.0	98.90			445
Tufo	60	"	17.90	18.47	0.18	90.88	16.0	99.29	257	} <i>h</i> =0.000 314	
	90		17.10	18.57	0.14	85.19	17.0	99.05			298
	120		16.67	17.87	0.21	76.21	16.0	99.00			388

Conduttività interna. — L'apparecchio adoperato per le misure relative alla conduttività interna (1) consiste nella sua parte principale di un tubo di vetro A chiuso dalla parte superiore da una sottile lamina di rame. Il matraccio B conteneva dell'acqua in ebollizione il cui vapore poteva per mezzo del tubo C venir portato entro il tubo A; di qui per mezzo dei condotti D veniva portato fuori della stanza. Il disco da studiare veniva collocato sulla detta lamina di rame a tal uopo precedentemente amalgamata e ricoperta di un leggero strato di mercurio onde meglio assicurare il contatto. Sulla faccia superiore del disco e ad una medesima distanza dal centro mettevamo dei granellini microscopici di sostanze fondenti a temperature distinte. Aprendo la chiave E, il vapor d'acqua invade il tubo A comunicando la sua temperatura alla lastra di rame e quindi alla base inferiore del disco sovrapp-



(1) Vedi Meyer, *Zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit* etc. Wied. Ann. 1888, vol. 34.

posto. Le condizioni dell'esperienza sono in questo modo pienamente realizzate. Con un orologio veniva misurato l'intervallo di tempo fra la fusione dei due granellini sopra indicati.

Le sostanze adoperate a questo scopo erano:

- 1) L'Uretano fondente a 49°.
- 2) L'Acido palmitico * 62°.

L'esperienza ha dato per t i seguenti valori medie di molte misure:

Calcere	$t = 16^s$
Tartaro	$t = 20$
Travertino	$t = 22$
Lava	$t = 28$
Trachite	$t = 32$
Peperino	$t = 56$
Terracotta	$t = 47$
Tufo	$t = 100$

Prima di procedere avanti nei calcoli, occorre dimostrare la rapida convergenza delle due serie che entrano in (e) (1). Prendo ad es. la lava; si hanno per essa i seguenti valori:

$\alpha_1 d = 1.4669$	$\alpha_1 = 1.4105$	$\alpha_1^2 = 1.9895$	$A_1 = 1.3145$
$\alpha_2 d = 4.6796$	$\alpha_2 = 4.4996$	$\alpha_2^2 = 20.2466$	$A_2 = 0.4444$
$\alpha_3 d = 7.8345$	$\alpha_3 = 7.5332$	$\alpha_3^2 = 56.7487$	$A_3 = 0.2508$
$\alpha_4 d = 10.9818$	$\alpha_4 = 10.5594$	$\alpha_4^2 = 111.5014$	$A_4 = 0.1849$
$\beta_1 e = 1.838$	$\beta_1 = 0.9239$	$\beta_1^2 = 0.8535$	$B_1 = 0.4291$
$\beta_2 e = 3.466$	$\beta_2 = 1.7417$	$\beta_2^2 = 3.0335$	$B_2 = -0.1615$
$\beta_3 e = 5.058$	$\beta_3 = 2.5417$	$\beta_3^2 = 6.4603$	$B_3 = 0.0912$
$\beta_4 e = 6.640$	$\beta_4 = 3.3367$	$\beta_4^2 = 11.1342$	$B_4 = -0.0605$

L'andamento di questi termini giustifica l'ipotesi fatta da principio, di poterci cioè arrestare ai primi termini delle due serie (e). Venendo ora ai calcoli finali per mezzo delle equazioni (η) (ϑ) (ω) si ottengono i seguenti risultati. Le d e e sono date più sopra.

Tabella per la conduttività interna.

Calcere	$ad = 1.5037$	$\alpha = 1.4599$	$\alpha^2 = 2.1313$
	$\beta e = 1.863$	$\beta = 0.9133$	$\beta^2 = 0.8342$
Tartaro	$ad = 1.4749$	$\alpha = 1.4460$	$\alpha^2 = 2.0909$
	$\beta e = 1.841$	$\beta = 0.9048$	$\beta^2 = 0.8186$
Travertino	$ad = 1.4698$	$\alpha = 1.4761$	$\alpha^2 = 2.1788$
	$\beta e = 1.835$	$\beta = 0.9024$	$\beta^2 = 0.8144$
Lava	$ad = 1.4669$	$\alpha = 1.4105$	$\alpha^2 = 1.9895$
	$\beta e = 1.838$	$\beta = 0.9238$	$\beta^2 = 0.8534$
Trachite	$ad = 1.4071$	$\alpha = 1.4521$	$\alpha^2 = 2.1086$
	$\beta e = 1.797$	$\beta = 0.9547$	$\beta^2 = 0.9115$
Peperino	$ad = 1.3078$	$\alpha = 1.2551$	$\alpha^2 = 1.5752$
	$\beta e = 1.737$	$\beta = 0.8550$	$\beta^2 = 0.7310$
Terracotta	$ad = 1.3003$	$\alpha = 1.3228$	$\alpha^2 = 1.7448$
	$\beta e = 1.723$	$\beta = 0.8534$	$\beta^2 = 0.7283$
Tufo	$ad = 1.1583$	$\alpha = 1.1847$	$\alpha^2 = 1.4034$
	$\beta e = 1.667$	$\beta = 0.8823$	$\beta^2 = 0.7784$

(1) Nota precedente.

I valori che risultano per la costante k sono:

Calcare	$k = 0.003\ 620$
Tartaro	$k = 0.002\ 749$
Travertino	$k = 0.002\ 519$
Lava	$k = 0.002\ 013$
Trachite	$k = 0.001\ 398$
Peperino	$k = 0.001\ 133$
Terracotta	$k = 0.001\ 017$
Tufo	$k = 0.000\ 607$

L'andamento della temperatura nel suolo. — Dai valori sopra trovati per la conduttività termica, ho cercato di determinare l'andamento annuo e diurno della temperatura nel suolo. Per una breve estensione la superficie terrestre può in questo caso riguardarsi come piana, ed il suolo sottostante può considerarsi come avente nel senso della profondità dimensioni infinite. Inoltre l'andamento della temperatura alla superficie del suolo nel periodo di un giorno o di un anno può, per una prima approssimazione, rappresentarsi con un coseno. La temperatura ϑ nel suolo sarà funzione del tempo t e della profondità z e dovrà soddisfare le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\vartheta = \varrho_1 \cos \frac{2\pi}{T} t \quad \text{per } z = 0. \quad (2)$$

Di queste la prima è l'ordinaria equazione di propagazione secondo una sola direzione, la seconda è la condizione alla superficie. Inoltre T è il periodo annuo o diurno che si considera, ϱ_1 la semioscillazione della temperatura alla superficie del suolo. Le (1) e (2) son soddisfatte da

$$\vartheta = \varrho_0 + \varrho_1 e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\frac{T}{\pi}}} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{z}{2a} \sqrt{\frac{T}{\pi}} \right). \quad (3)$$

La (3) dimostra che per una certa profondità la temperatura media è sempre la stessa ϱ_0 che alla superficie, l'oscillazione completa è data da

$$\varrho = 2\varrho_1 e^{-\frac{z}{a} \sqrt{\frac{T}{\pi}}}$$

ed il periodo subisce un ritardo dato da

$$\tau = \frac{z}{2a} \sqrt{\frac{T}{\pi}}.$$

Nei seguenti quadri darò per varie profondità i valori di ϱ e di τ dettati dalle formole precedenti. I valori relativi alla superficie del suolo son dati da un lavoro del dott. Cancani (1).

In queste determinazioni l'unica quantità specifica variabile da una roccia all'altra è la costante $a = \sqrt{\frac{k}{c\delta}}$.

(1) Cancani, *Valori normali ed andamento diurno ed annuo della temperatura di Roma*. Annali dell'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica italiano, vol. XI, parte I, 1889.

Per essa si hanno i seguenti valori calcolati su i risultati avuti finora:

Calcarea	$a = 0.078\ 748$
Tartaro	$a = 0.071\ 109$
Travertino	$a = 0.066\ 845$
Lava	$a = 0.060\ 798$
Trachite	$a = 0.055\ 177$
Peperino	$a = 0.047\ 732$
Tufo	$a = 0.036\ 723$

Da questi calcoli ho esclusa la terracotta.

Andamento annuo. — Per l'andamento annuo i valori cavati dalla Nota suddetta relativamente alla superficie del suolo sono:

- $q_0 = 15^{\circ}.29$;
- $2q_1 = 19^{\circ}.3$;
- temperatura massima $25^{\circ}.5$;
- temperatura minima $6^{\circ}.2$;
- epoca della temperatura massima, 23 luglio;
- epoca della temperatura minima, 14 gennaio.

Dai calcoli si ottiene:

	$z = 1\ m.$		$z = 2\ m.$		$z = 3\ m.$		$z = 4\ m.$		$z = 5\ m.$		$z = 6\ m.$		$q = 0^{\circ}.1$	
	q	τ	q	τ	q	τ	q	τ	q	τ	q	τ	z	τ
Calcarea	12.9 ^o	23*	8.7 ^o	47*	5.8 ^o	70*	3.9 ^o	93*	2.6 ^o	116*	1.7 ^o	140*	13.1 ^m	306
Tartaro	12.4	26	7.9	52	5.1	77	3.3	103	2.1	129	1.3	155	11.9	"
Travertino	12.0	27	7.5	55	4.7	82	2.9	110	1.8	137	1.1	165	11.1	"
Lava	11.5	30	6.8	60	4.1	91	2.4	121	1.4	151	0.9	181	10.1	"
Trachite	10.9	33	6.1	66	3.5	100	2.0	133	1.1	166	0.6	199	9.2	"
Peperino	10.0	38	5.1	77	2.7	115	1.4	154	0.7	192	0.4	231	8.0	"
Tufo	8.2	50	3.5	100	1.5	150	0.6	200	0.3	250	0.11	300	6.1	"

Di qui possono con facilità dedursi i valori e le epoche delle temperature estreme. L'ultima colonna dà la profondità a cui l'oscillazione è un decimo di grado dove si può ammettere il piano invariabile.

Andamento diurno. — Per l'andamento diurno siccome l'ampiezza di oscillazione alla superficie del suolo è variabile nel corso di un anno, ho espresso per le varie profondità il valore di q in frazione del suo valore alla superficie. Ho trovato:

	$z = 10\ cm.$		$z = 20\ cm.$		$z = 30\ cm.$		$z = 40\ cm.$	
	q	τ	q	τ	q	τ	q	τ
Calcarea	0.4649	2.55 ^{h m}	0.2162	5.31 ^{h m}	0.1000	8.46 ^{h m}	0.0468	11.42 ^{h m}
Tartaro	0.4283	3.14	0.1834	6.29	0.0786	9.43	0.0336	12.57
Travertino	0.4037	3.27	0.1646	6.53	0.0668	10.20	0.0271	13.47
Lava	0.3709	3.47	0.1377	7.35	0.0510	11.22	0.0189	15.8
Trachite	0.3352	4.10	0.1124	8.21	0.0377	12.31	0.0126	16.42
Peperino	0.2827	4.50	0.0799	9.39	0.0226	14.29	0.0064	19.18
Tufo	0.1936	6.16	0.0375	12.33	0.0073	18.49	0.0014	25.5

L'andamento diurno della temperatura alla superficie del suolo è dato dalla seguente tabella ricavata anch'essa dal citato lavoro del Cancani:

		Temperatura minima	Ora della temperatura minima	Temperatura massima	Ora della temperatura massima
		o	ant.	o	pm.
Gennaio	1 ^a decade.	4.2	7	10.8	2
	2 ^a "	3.5	7	10.6	2
	3 ^a "	3.3	7	10.9	2
Febbraio	1 ^a "	4.0	6-7	11.6	2
	2 ^a "	4.5	6	12.4	2
	3 ^a "	5.5	6	13.4	2
Marzo	1 ^a "	5.4	6	13.8	2
	2 ^a "	6.6	6	14.7	1
	3 ^a "	7.4	5-6	15.6	1
Aprile	1 ^a "	8.7	5-6	17.2	1
	2 ^a "	9.5	5	18.0	1
	3 ^a "	10.4	5	19.4	1
Maggio	1 ^a "	11.8	5	21.0	1
	2 ^a "	12.3	4-5	22.6	1
	3 ^a "	14.2	4-5	24.5	1
Giugno	1 ^a "	15.8	4-5	25.9	1
	2 ^a "	16.1	4	26.1	1
	3 ^a "	16.9	5	27.6	1
Luglio	1 ^a "	18.4	4	29.5	1
	2 ^a "	19.2	5	30.5	1
	3 ^a "	19.2	5	30.7	1
Agosto	1 ^a "	19.1	5	30.3	1
	2 ^a "	18.8	5	30.1	1
	3 ^a "	18.3	5	29.0	1
Settembre	1 ^a "	17.7	5	27.9	1
	2 ^a "	16.2	5	25.9	1
	3 ^a "	15.4	5	24.1	1
Ottobre	1 ^a "	14.0	5-6	22.5	1
	2 ^a "	12.2	5-6	20.3	2
	3 ^a "	11.1	5-6	18.6	2
Novembre	1 ^a "	8.7	6	16.5	2
	2 ^a "	7.9	6	14.9	2
	3 ^a "	6.9	6	14.0	2
Dicembre	1 ^a "	5.8	6	12.0	2
	2 ^a "	5.0	6	11.6	2
	3 ^a "	4.6	6	11.0	2

Da queste tavole si può avere un'idea sull'andamento della temperatura nel suolo. I valori però che di qui si ricavano non possono essere che approssimati. In Roma e nell'Italia intera non vennero ancora eseguite osservazioni dirette su questo riguardo.