ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Nel Canton Grigioni (Malans: località lievissimamente malarica) il sig. Engel ci raccolse in una cantina parecchi *Anopheles* tra cui anche uno molto prossimo, se non uguale, allo *pseudopictus*; gli altri appartenevano alla specie *A. claviger*; a quest' ultima specie appartengono altri *Anopheles* provenienti dalla Germania settentrionale, dove però non trovammo chi si prestasse a raccogliercene direttamente degli esemplari.

Nella stanza riscaldata, nella quale alleviamo le zanzare, assistemmo alla deposizione delle uova di *Anopheles claviger*. Questo culicide deposita le uova in parecchi nastrini galleggianti di tre, quattro, venti uova e non costruisce la ben nota barchetta del *C. pipiens*.

Il *C. pipiens* sverna, oltre che nelle case, nell' Italia media e meridionale, a gran preferenza, nelle grotte dove si trova anche qualche maschio.

7. Nella stanza in discorso vi sono moltissimi zanzaroni che da circa due mesi non hanno succhiato sangue malarico. Nell' ultimo mese hanno punto moltissime volte senza produrre alcuna infezione malarica: ciò che era del resto presumibile dopo i fatti esposti nella Nota precedente, e ciò che trova la sua giustificazione nella mancanza di sporozoiti dentro le ghiandole salivari degli individui che si sezionarono (1).

Mentre correggiamo le bozze della presente Nota ci perviene il Resoconto della *Spedizione di Koch in Italia per lo studio della malaria*. Esso porta la data del 17 novembre, ma è uscito soltanto il 2 febbraio: *more solito*, i nostri lavori non sono citati. Noi qui non ne moviamo special lamento, perchè viviamo nella fiducia che il mondo scientifico ci farà ragione.

I preparati dimostranti i fatti esposti nelle nostre Note preliminari sono visibili, a chi s' interessa, nell' ospedale di S. Spirito e nel Laboratorio di Anatomia comparata dell' Università di Roma.

Matematica. — *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^2\Delta^2 = 0$. Nota dell' ing. E. Almansi, presentata dal Corrispondente Volterra.

1. In questa Nota espongo succintamente un metodo d' integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$, che permette di ottenere, in un' area piana semplicemente connessa, la funzione bi-armonica da determinarsi, espressa per mezzo d' integrali definiti, quando al contorno si conosca il valore della funzione stessa, e della sua derivata rispetto alla normale interna. Il metodo è applicabile ad un' estesa classe di aree (2).

(1) Sui tagli si vede con certezza che un tubolo ghiandolare presenta un secreto differente da quello degli altri.

(2) In una Memoria di prossima pubblicazione verrà esposto per disteso il procedimento che qui riassumo.

2. Considero da prima un caso particolare. Il contorno dell' area data σ', i cui punti suppongo riferiti ad un sistema di coordinate ortogonali x', y', si ottenga facendo variare fra 0 e 2π il parametro θ nelle due equazioni:

$$x' = \cos\theta + a\cos 2\theta\,,$$
$$y' = \operatorname{sen}\theta + a\operatorname{sen} 2\theta\,,$$

ove a è una costante, in valore assoluto minore di $\frac{1}{2}$.

Sia U' la funzione bi-armonica, che si tratta di determinare. Questa funzione potremo sempre rappresentarla con due funzioni armoniche u_0', u_1', mediante la formula:

$$U' = u_0' + x'u_1' \text{ (1)}.$$

Facciamo ora la rappresentazione conforme dell' area σ', sul cerchio σ, di raggio 1, appartenente al piano (xy). Perciò basterà porre:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\theta + ar^2\cos 2\theta\,, \\ y' &= r\operatorname{sen}\theta + ar^2\operatorname{sen} 2\theta\,, \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \operatorname{arc\,tag}\frac{y}{x}\,, \end{aligned} \right.$$

ovvero:

$$x' = x + a(x^2 - y^2)\,,$$
$$y' = y + 2axy\,,$$

come si verifica immediatamente.

Diciamo U, u_0, u_1, le funzioni U', u_0', u_1', espresse mediante le variabili x, y. Sarà:

$$\text{(1)} \qquad U = u_0 + \{x + a(x^2 - y^2)\}\, u_1\,.$$

Le funzioni $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$, sono ancora armoniche. Ne segue che la funzione $U(x, y)$ è tri-armonica. Essa infatti è la somma della funzione armonica u_0, e di una funzione tri-armonica ottenuta moltiplicando la funzione armonica u_1, per la funzione razionale intera del 2° grado $x + a(x^2 - y^2)$.

Potremo dunque rappresentarla con tre funzioni armoniche v_0, v_1, v_2, ponendo:

$$\text{(2)} \qquad U = v_0 + (r^2 - 1)\, v_1 + (r^2 - 1)^2\, v_2\,.$$

(1) Questa, ed altre proprietà delle funzioni poli-armoniche, di cui mi valgo più avanti, si trovano dimostrate, con qualche restrizione, che però può eliminarsi, nella mia Memoria: *Sull' integrazione dell' equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Annali di matematica, tomo II, serie III, a. 1898.

Sulla circonferenza del cerchio σ noi conosciamo la funzione U, e la sua derivata normale $\frac{\partial U}{\partial \nu}$. Sia $U = \varphi$, $\frac{\partial U}{\partial \nu} = \psi$. Per l'equazione (1), sarà:

$$[v_0]_{r=1} = , \left[\frac{\partial v_0}{\partial \nu} - 2v_1\right]_{r=1} = \psi .$$

Queste formule permettono di determinare in tutto il cerchio σ le due funzioni armoniche v_0, v_1: dopo di che, non avremo più da occuparci delle condizioni al contorno.

Ottenute le funzioni v_0, v_1, uguagliamo i due secondi membri delle equazioni (1) e (2):

$$u_0 + \{x + a(x^2 - y^2)\} u_1 = v_0 + (r^2 - 1) v_1 + (r^2 - 1)^2 v_2 .$$

Su questa equazione eseguiamo l'operazione Δ^2. E poniamo inoltre:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + c_1 ,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} + c_2 ,$$

essendo w una nuova funzione armonica, c, c_1, c_2 due costanti: ciò che può sempre farsi. Si otterrà:

$$r^2 . 2a \left[\frac{\partial w}{\partial x} - w_1\right] + \left[r \frac{\partial w}{\partial r} - w_2\right] = 0 ,$$

Ma, in un' area piana che contiene l' origine delle coordinate, perchè una funzione bi-armonica $r^2 u + v$, espressa mediante le due funzioni armoniche u, v, possa essere identicamente nulla, è necessario che siano nulle le due funzioni armoniche. Sarà dunque:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_1 , \quad r \frac{\partial w}{\partial r} = w_2 , \tag{3}$$

da cui, eliminando la w, si ricava:

$$w_1 + r \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial x} , \tag{4}$$

equazione in cui comparisce una sola funzione incognita, la v_2.

Sostituendo a w_1, w_2 le loro espressioni, e ponendo:

$$x_1 = x + 2a , \quad y_1 = y , \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} ,$$

$$v_3 = v_2 + r_1 \frac{\partial v_2}{\partial r_1} - a \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} a^2 c_1 ,$$

l'equazione (4) può scriversi:

$$2v_3 + r_1 \frac{\partial v_3}{\partial r_1} = 0 ,$$

da cui, la funzione v_3 essendo armonica, e l'origine delle coordinate x_1, y_1, cadendo entro il cerchio, si deduce: $v_3 = 0$; vale a dire

$$v_2 + r_1 \frac{\partial v_2}{\partial r_1} = a \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2} a^2 c_1 .$$

L'unica funzione armonica che verifica questa equazione, è quella espressa dalla formula:

$$v_2 = \frac{a}{r_1} \int_0^{r_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dr_1 - \frac{1}{2} a^2 c_1 .$$

dove le w_1, w_2, sono funzioni armoniche, date dalle formule:

$$w_1 = \frac{2}{a} \left\{ 2v_2 - r \frac{\partial v_2}{\partial r} \right\},$$

$$w_2 = -4 \left\{ v_2 + r \frac{\partial v_2}{\partial r} \right\} + 2 \left\{ v_1 + r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right\} - 2a(c_1 x - c_2 y) + c_1 .$$

Le quantità in parentesi sono pure funzioni armoniche.

Il valore della costante c_1, che ancora non conosciamo, si determina osservando che, per la seconda delle formule (3), la funzione w_2 deve annullarsi nell'origine delle coordinate x, y. Tenendo conto di questa condizione, si trova: $c_1 = \frac{2}{1 - 2a^2} (v_1)_1$, in cui $(v_1)_1$ rappresenta il valore della funzione v_1 nella origine delle coordinate x_1, y_1.

Così avremo determinato tutte e tre le funzioni che compariscono nella formula (2). E il problema sarà risoluto.

3. Un procedimento analogo, che però condurrà, in generale, a considerare nel piano (xy) una funzione poli-armonica U, d'un ordine superiore al terzo, si potrà applicare tutte le volte che la rappresentazione conforme dell'area σ' sul cerchio σ, si fa colle formule:

$$x' = \sum r^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) ,$$
$$y' = \sum r^n (a_n \operatorname{sen} n\theta - b_n \cos n\theta) ,$$

ove s'intende che l'indice n assume un numero finito di valori, uguali per l'una e per l'altra formula.

Con un metodo analogo si potrà anche integrare nell'area σ' l'equazione differenziale, più generale, $\Delta^{2n} = 0$, conoscendosi al contorno il valore della funzione e delle sue derivate rispetto alla normale interna, d'ordine 1, 2, ... $n - 1$.