

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

superficie libera siano orizzontali. Però se una causa qualunque turba questo equilibrio, i liquidi assumeranno la disposizione d'equilibrio stabile, per la quale le loro densità devono formare una serie crescente dall'alto al basso.

Supponiamo ora di avere un liquido la cui densità varia con continuità dall'uno all'altro de' suoi strati orizzontali secondo una legge qualsiasi, come sarebbe ad es. un liquido omogeneo nel quale la temperatura variasse colla distanza dalla superficie libera. Il liquido si troverà, in generale, in condizione d'equilibrio instabile.

Ora, se cause esterne turbano tali condizioni, noi possiamo domandarci quale sarà la distribuzione della densità, che si avrà nel liquido, quando esso si sarà ridotto allo stato di equilibrio stabile, ammesso che ogni elemento liquido conservi la sua densità ed il suo volume nel passaggio da uno stato all'altro.

Se $f(x)$ è la funzione rappresentante la densità iniziale, x essendo la distanza dalla superficie libera, si vede subito che quella finale deve essere data, conservando le notazioni del § 1, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

e quindi dalla ordinata della funzione $f(x)$.

La relazione (2) rappresenta in questo caso la conservazione della massa.

Fisica. — *Due scariche derivate da un condensatore.* Nota del Socio A. RÖRRI.

1. Tutto era disposto simmetricamente rispetto al condensatore C_2 (fig. 1) le cui armature comunicavano con due coppie di eliche formate con filo di rame grosso circa 2 mm., nudo ed assicurato a tre regoli di ebanite. Mediante pozzetti di mercurio le estremità delle eliche maggiori erano collegate cogli elettrodi d'un tubo di Röntgen, e quelle delle eliche minori con uno spinterometro. La carica arrivava al condensatore da una macchina elettroforica passando per i fili secondari di due grandi rocchetti di Ruhmkorff. La macchina era mandata da un motorino idraulico ed era collegata con un tachimetro ed un freno opportuno per mantenerne costante la velocità.

Scostando i poli della macchina, scoccavano le scintille allo spinterometro, oppure s'illuminava il tubo, secondo che questo era *duro* o *tenero* e che le palline erano più o meno vicine fra loro. Ma in generale le due scariche non avvenivano simultaneamente.

Per ciò bisognava regolare le impedenze dei due rami derivati impegnando fra le varie spire delle eliche i fili di rame AA' , BB' e così, fa-

cendo variare gradatamente l'autoinduzione di un ramo, quello per esempio contenente lo spinterometro, mentre rimaneva costante l'altro ramo, si arrivava ad un punto cui corrispondeva, per una data lunghezza della scintilla,

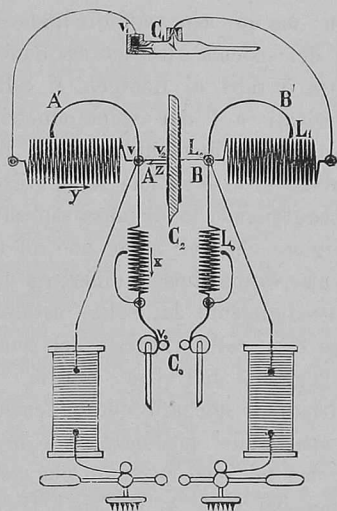


FIG. 1.

un massimo d'intensità dei raggi X emessi dal tubo, quale era accusata dall'attinometro a prisma fluorescente (1).

Una volta stabilite queste condizioni per il massimo, se si permutava il tubo collo spinterometro e si lasciava inalterato tutto il resto, le scintille scoccavano; ma il tubo rimaneva oscuro.

2. Affinchè si manifestasse il massimo per un altro valore dell'autoinduzione nel ramo del tubo, bisognava spostare i fili impegnati nelle eliche del ramo ove scoccavano le scintille, per modo che il rapporto delle due autoinduzioni riuscisse presso che costante.

3. Cambiando poi il condensatore, cambiava il valore di questo rapporto in maniera che, come prima approssimazione, si poteva ritenere che l'autoinduzione nel ramo del tubo dovesse mantenersi proporzionale al prodotto dell'autoinduzione nell'altro ramo per la capacità del condensatore.

4. Il massimo d'emissione dei raggi X aumentava colla lunghezza della scintilla, colla capacità del condensatore ed in generale col valore assoluto delle due autoinduzioni.

(1) *Criptocrosi*. Memorie dell'Accademia, serie 5^a, vol. II, pag. 135. — *Un attinometro per i raggi X*. L'Electricista, anno V, n. 9.

Invertendo, con acconcio commutatore la corrente di carica, il tubo seguiva ad emettere i raggi di Röntgen, la qual cosa sta a provare che la scarica nel tubo era oscillante. E noterò che il più delle volte l'emissione era maggiore quando l'anticatodo comunicava coll'armatura negativa, che quando comunicava colla positiva. Questa e molte altre singolarità presentava il tubo di Röntgen; ma qui non voglio indugiarmi, mirando piuttosto a chiarire le condizioni del sistema elettrico oscillante.

5. Messo in disparte il tubo di Röntgen, si colloca uno spinterometro in ciascuno dei rami derivati, e i due spinterometri sono uguali fra loro. Stabilito poi il rapporto delle due autoinduzioni per cui l'emissione dei raggi X risultava massima, si osserva che le scintille scoccano simultaneamente nei due rami anche quando la distanza esplosiva in quello di maggior impedenza è molto maggiore che nell'altro, fino ad un massimo.

Questa distanza esplosiva massima, a differenza della massima emissione degli X, non dipende sensibilmente dal valore assoluto delle due autoinduzioni; ma aumenta anch'essa colla capacità del condensatore, ed aumenta, com'è naturale, colla lunghezza dell'altra scintilla.

6. Mi sono industriato a spiegare questi fenomeni colla solita teoria mettendo in conto la capacità del condensatore, e le autoinduzioni e le resistenze dei due rami; ma mi sono persuaso che nè la soluzione approssimativa data al problema dal prof. A. Garbasso (1), nè un'altra soluzione più rigorosa favoritami dal prof. V. Volterra (2) sono a ciò sufficienti.

7. Quindi mi sono accertato che la resistenza dei rami derivati esercita un'influenza secondaria sull'andamento del fenomeno, poichè il rapporto delle autoinduzioni che determina il massimo rimane presso che inalterato per distanze esplosive diverse e per tubi di Röntgen molto vari.

D'altro canto ho riscontrato che fissando a tergo delle palline scaricatorie due dischi metallici in maniera che le scintille scocassero fra di essi e perpendicolarmente al loro piano, il fenomeno poteva esserne alterato notevolmente. Mentre i dischi aggiunti allo spinterometro del ramo avente minor induzione non producevano effetti apprezzabili, li producevano marcatissimi se aggiunti all'altro spinterometro, e cioè riducevano meno lontano dall'unità il rapporto delle due autoinduzioni determinante il massimo, e facevano diminuire il valore di questo massimo.

8. Siffatte osservazioni mettono in evidenza la necessità di non trascurare, come si suol fare in casi consimili, le capacità dei rami scaricatori ed autorizzano, per una spiegazione approssimativa, a trascurarne le resistenze. Quindi il problema si può porre considerando un sistema di tre condensa-

(1) *Come si faccia la scarica d'un condensatore, quando ad essa si offrono due vie.* Nuovo Cimento, serie IV, tomo VI, pag. 15.

(2) Ringrazio anche qui il prof. V. Volterra dell'aiuto prestatomi nell'eseguire i calcoli che seguono.

tori simmetrici di capacità c_0, c_1, c_2 , simmetricamente riuniti in parallelo fra due punti A, B mediante conduttori aventi autoinduzioni L_0, L_1, L_2 e disposti in modo che l'induzione muta sia trascurabile; indi supponendo che la differenza di potenziale fra A e B si faccia gradatamente aumentare fin che scocchi la scintilla fra le armature del condensatore avente il dielettrico più debole.

Sia c_0 questo condensatore rappresentante lo spinterometro che, essendo disposto per la minor distanza esplosiva, chiameremo *primario*; sia c_1 il condensatore rappresentante l'altro spinterometro che chiameremo *secondario* e le cui palline supporremo per ora abbastanza discoste perchè non vi scocchi la scintilla, e sia c_2 la capacità del condensatore vero e proprio, e quindi molto maggiore di c_1 e c_0 fino a che non avvenga la scarica.

Ma iniziandosi la prima scintilla, è come se le armature del condensatore primario fossero poste in corto circuito, e però la sua capacità c_0 acquistasse un valore infinito per conservarlo durante tutto il processo. E sarà facile introdurre nelle formole questa condizione quando si sia trovata la soluzione pel caso generale che le tre capacità abbiano valori finiti, che siano dati i valori iniziali delle differenze di potenziale sulle armature dei tre condensatori e che le intensità iniziali delle tre correnti sieno nulle.

9. Indicate con v_0, v_1, v_2, v le differenze di potenziale al tempo t dei tre condensatori e dei due punti di derivazione e con L_0, L_1, L_2 i coefficienti d'autoinduzione dei tre rami che guidano le correnti x, y, z , dovrà essere:

$$(1) \quad x = c_0 \frac{dv_0}{dt}, \quad -y = c_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad -z = c_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$(2) \quad L_0 \frac{dx}{dt} = v - v_0, \quad -L_1 \frac{dy}{dt} = v - v_1, \quad -L_2 \frac{dz}{dt} = v - v_2$$

$$(3) \quad x = y + z$$

Eliminando le x, y, z , fra le (1) e (2), si ottiene:

$$(4) \quad c_0 L_0 \frac{d^2 v_0}{dt^2} + v_0 = v, \quad c_1 L_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + v_1 = v, \quad c_2 L_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + v_2 = v$$

le quali, essendo soddisfatta la condizione (3), cioè:

$$(5) \quad c_0 \frac{dv_0}{dt} + c_1 \frac{dv_1}{dt} + c_2 \frac{dv_2}{dt} = 0.$$

danno:

$$(6) \quad \frac{v_0}{L_0} + \frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2} = v \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)$$

Ponendo poi:

$$v_0 = A \cos \alpha t \quad v_1 = B \cos \alpha t \quad v_2 = C \cos \alpha t$$

$$\beta_0 = 1 - L_0 c_0 \alpha^2 \quad \beta_1 = 1 - L_1 c_1 \alpha^2 \quad \beta_2 = 1 - L_2 c_2 \alpha^2$$

le (4) diventano:

$$(7) \quad \beta_0 A = \beta_1 B = \beta_2 C = \frac{v}{\cos \alpha t}$$

e la (6) equivale alla condizione:

$$L_0 L_1 \beta_0 \beta_1 + L_1 L_2 \beta_1 \beta_2 + L_2 L_0 \beta_2 \beta_0 = \beta_0 \beta_1 \beta_2 (L_0 L_1 + L_1 L_2 + L_2 L_0)$$

che sarà soddisfatta se per α^2 si prenderà una radice dell'equazione:

$$(8) \quad a\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda = 0$$

dove è:

$$\begin{aligned} a &= c_0 c_1 c_2 (L_0 L_1 + L_1 L_2 + L_2 L_0) \\ b &= c_0 c_1 (L_0 + L_1) + c_1 c_2 (L_1 + L_2) + c_2 c_0 (L_2 + L_0) \\ c &= c_0 + c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Quindi, posto:

$$\alpha'^2 = \lambda' = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \alpha''^2 = \lambda'' = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \alpha'''^2 = \lambda''' = 0$$

e per le (7):

$$A = H \beta_1 \beta_2 \quad B = H \beta_2 \beta_0 \quad C = H \beta_0 \beta_1$$

risulterà:

$$\begin{aligned} v_0 &= H' \beta'_1 \beta'_2 \cos \alpha' t + H'' \beta''_1 \beta''_2 \cos \alpha'' t + H''' \\ v_1 &= H' \beta'_2 \beta'_0 \cos \alpha' t + H'' \beta''_2 \beta''_0 \cos \alpha'' t + H''' \\ v_2 &= H' \beta'_0 \beta'_1 \cos \alpha' t + H'' \beta''_0 \beta''_1 \cos \alpha'' t + H''' \end{aligned}$$

e le H si dedurranno dai valori u_0, u_1, u_2 che saranno attribuiti a v_0, v_1, v_2 per $t = 0$.

Facendo poi $c_0 = \infty$, si otterrà:

$$(9) \quad \begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{2} (\cos \alpha' t + \cos \alpha'' t) + \\ + \frac{(u_0 - u_1)(L_0 c_1 + L_1 c_1 - L_2 c_2) + (u_0 + u_1 - 2u_2)L_0 c_2}{2\sqrt{b^2 - 4ac}} (\cos \alpha' t - \cos \alpha'' t). \end{cases}$$

10. Avendo trascurato la resistenza della scintilla primaria, bisognerà che sia $u_0 = 0$, e se si considera il caso particolare che gli altri due condensatori ricevano la carica mentre sono riuniti in batteria, si potrà porre $u_1 = u_2 = \mathcal{A}$, indicata con \mathcal{A} la differenza di potenziale necessaria affinché scocchi la prima scintilla primaria.

In tal caso, ponendo:

$$(10) \quad K = \frac{c_1(L_0 + L_1) + c_2(L_0 - L_2)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

ove è:

$a = c_1 c_2 (L_0 L_1 + L_1 L_2 + L_2 L_0)$, $b = c_1 (L_0 + L_1) + c_2 (L_0 + L_2)$, $c = 1$
risulterà:

$$\frac{v_1}{A} = \frac{\cos \alpha'' t + \cos \alpha' t}{2} + K \frac{\cos \alpha'' t - \cos \alpha' t}{2}$$

od anche:

$$(11) \quad \frac{v_1}{A} = \frac{K+1}{2} \cos \alpha'' t - \frac{K-1}{2} \cos \alpha' t.$$

La quale ci mostra che per ogni scintilla primaria, la variazione della differenza di potenziale allo spinterometro secondario è composta di due oscillazioni semplici che hanno le frequenze $\frac{\alpha'}{2\pi}$ e $\frac{\alpha''}{2\pi}$, e le ampiezze $(K-1)A$ e $(K+1)A$, e che si trovano in opposizione di fase al tempo $t=0$.

11. Gli spostamenti massimi dell'oscillazione risultante saranno certamente compresi fra $+K$ e $-K$, e per conseguenza il valore di K determinerà la lunghezza della scintilla secondaria.

Ciò posto, osserveremo che K , al variare di L_0 , assume il valor massimo:

$$(12) \quad K_m = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_0 + L_2}} = \sqrt{\frac{c_2 + c_1}{c_1}}$$

quando è verificata la condizione:

$$(13) \quad (c_1 + c_2) L_0 + c_2 L_2 - c_1 L_1 = 0$$

il che equivale a dire che devono avere lo stesso periodo di vibrazione i due circuiti semplici formati dal ramo contenente il condensatore, e da uno degli altri due rami, giacchè i periodi propri di questi due circuiti sono:

$$\sqrt{c_0(L_0 + L_2)} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} (L_1 + L_2)}$$

12. Intanto la (12) rende ragione del fatto che la scintilla massima, che si produce nel ramo secondario, aumenta insieme colla capacità c_2 del condensatore (§ 5), e diminuisce (§ 7) al crescere della capacità c_1 dello spinterometro, ed inoltre che dipende dal rapporto delle induzioni ma è indipendente (§ 5) dal loro valore assoluto.

Nel caso che sia trascurabile, com'era nelle esperienze, l'autoinduzione L_2 dei fili che vanno dai punti di derivazione A, B alle armature del condensatore, la cui capacità c_2 sia grande rispetto alla capacità delle porzioni di eliche escluse dai fili AA', BB', la condizione (13) pel massimo di K si può porre sotto la forma:

$$(14) \quad \frac{c_2 L_0}{L_1 - L_0} = \text{costante}$$

la quale, se si riflette che L_0 era sempre piccola confronto ad L_1 , viene a giustificare la legge sperimentale di proporzionalità approssimativa enunciata al § 3.

13. Per indicare come ho condotto queste determinazioni, dirò che col l'apparato del prof. M. Wien ⁽¹⁾ ho potuto costruirmi la curva dell'auto-induzione L_1 corrispondente alle varie disposizioni dei fili AA', BB' impegnati fra le spire delle eliche di maggior diametro, cioè di 12 cm. Le eliche minori, che avevano il diametro di cm. 4,5, le ho potute confrontare nella loro totalità colle precedenti; ma le autoinduzioni L_0 proprie di poche spire, le ho dovute ammettere proporzionali alle ordinate corrispondenti allo stesso numero di spire sulla curva relativa alle eliche maggiori.

I condensatori erano tutti costruiti con una medesima lastra di vetro, avevano le armature circolari di stagnola, e le loro capacità c_2 sono state calcolate colla formola :

$$C = \frac{c_2}{D} = \frac{10^{-20}}{9} \left[\frac{r^2}{4d} + \frac{r}{4\pi} \left(2 + \log \frac{16\pi r}{ed} \right) \right]$$

Per verificare la (14) ho eseguito i calcoli sopra una qualunque delle serie di osservazioni fatte tenendo costante il numero delle spire attive nel ramo contenente un tubo di Röntgen, e cercando per tentativi il numero delle spire che doveva lasciar libere nel ramo dello spinterometro affinché i raggi X acquistassero l'intensità massima. Ed i risultati sono inseriti nella seguente tabella dall'ultima colonna della quale si vede che le oscillazioni intorno al valor medio sono compatibili cogli errori probabili in tal genere di determinazioni.

r cm.	d cm.	$10^{20}C$	$10^{-6}L_1$	$10^{-6}L_0$	$\frac{10^{20}CL_0}{L_1 - L_0}$	δ
16	0,16	11,25	} 0,383	0,0041	0,121	+ 10
10	0,19	3,93		0,0100	0,105	- 6
6	0,20	1,37		0,0300	0,116	+ 5
		11,25	} 0,725	0,0065	0,102	- 9
		3,93		0,0210	0,117	+ 6
		1,37		0,0523	0,107	- 4
					Media 0,111	

14. In appresso ho dato all'apparecchio una disposizione migliore che è rappresentata nella fig. 2. — Ai due lati del condensatore piano C_2 ed in comunicazione colle sue armature si trovano due recipienti d'ottone entro i quali possono più o meno introdursi le eliche secondarie, ed essere fissate

⁽¹⁾ Wied. Ann. Bd. 57, pag. 249.

da un bottone A, o B, in maniera da far variare le spire attive senza alterare la capacità c_2 . L'estremità superiore di queste eliche è saldata ad una asticella che scorre a sfregamento e può nascondersi per intero entro

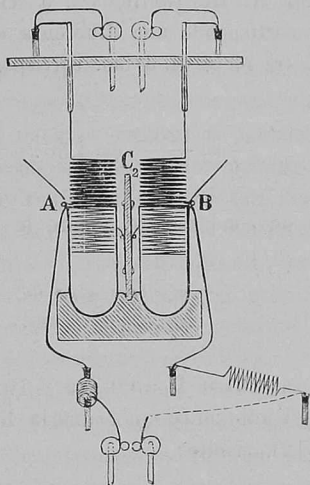


FIG. 2.

un cannello d'ottone, il quale superiormente comunica in modo invariabile con un pozzetto dello spinterometro secondario o del tubo di Röntgen.

Al bottone A, o B, fa capo o direttamente e col mezzo d'un pozzetto una delle eliche primarie (che nella figura per chiarezza sono state abbassate dal piano orizzontale passante per AB, e quella comunicante con B è stata abbattuta) e fanno pure capo i fili adduttori della carica, essendomi accertato che non monta fissarli quivi anzi che alle palline dello spinterometro primario.

Con questa disposizione e con un condensatore circolare del diametro di 30 cm., avente gli orli della stagnola ricoperti da un grosso strato di mastice isolante, ho ottenuto delle scintille secondarie fino a dodici volte più lunghe delle primarie.

15. Ma piuttosto che ad ottenere lunghe scintille, l'ho impiegata a verificare un altro punto della teoria svolta più sopra, e cioè a vedere se e quanto il valore del rapporto $\frac{v_1}{A}$ dedotto dalle due distanze esplosive s'avvicini (§ 10) al valor massimo K_m . Conveniva dunque che rimanessi nei limiti delle tabelle che recano le differenze di potenziale corrispondenti alle varie distanze esplosive fra palline di diametro dato.

Perciò ho scelto la distanza esplosiva primaria di cm. 0,2 fra palline di 2 cm. e facendo variare via via di una unità il numero delle spire, ho

notato le varie distanze cui doveva condurre colla vite micrometrica due sfere di 5 cm. affinchè cominciassero a scoccare in successione regolare le scintille secondarie. Così ho trovato in media di parecchie osservazioni ben concordanti, che la massima distanza esplosiva era di cm. 1,15.

Ora, secondo il prof. A. Heydweiller (1), a scintille di cm. 0,2 fra sfere del diametro di 2 cm. corrisponde una differenza di potenziale come 27, ed a scintille di cm. 1,15 fra sfere di 5 cm. corrisponde 123,2, per cui:

$$\frac{v_1}{A} = \frac{123,2}{27} = 4,56.$$

D'altra parte, con un condensatore avente la capacità calcolata

$$c_2 = 6,66 \times 10^{-20} \frac{\text{sec.}^2}{\text{cm.}}$$

e con un'autoinduzione secondaria $L_1 = 0,725 \times 10^6$ era richiesta per la massima distanza esplosiva l'autoinduzione primaria $L_0 = 0,031 \times 10^6$, per cui facendo $L_2 = 0$ nella (12), risulta:

$$K_m = \sqrt{\frac{L_1}{L_0}} = 4,90.$$

Il disaccordo non arriva al 7 per 100, ed è molto minore di quello che si può aspettare da determinazioni di questo genere, tanto più se si pensa che l'aver trascurata L_2 porta ad aver aumentato un pochino il valore di K , e che il riscaldamento dell'aria fra le palline primarie tende ad abbassare il valore di $\frac{v_1}{A}$.

Le scintille si succedevano rapidissimamente perchè in queste ultime esperienze il condensatore era caricato da una macchina di Töpler con 36 dischi che ho fatto costruire dal sig. Silvio Lavacchini, meccanico del R. Istituto di studî superiori, su disegno gentilmente procuratomi dal prof. W. Voigt.

Ringrazio anche il dott. Guido Ercolini per l'assistenza prestatami nel fare le osservazioni.

(1) Wied. Ann. Bd. 48, pag. 235.