ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 febbraio 1899.

A. Messedaglia Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla teoria della deformazione delle superficie di rivoluzione.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

§ 1. In una recente comunicazione all'Accademia delle Scienze di Parigi [1] il sig. Guichard ha enunciato alcuni risultati relativi alla teoria della deformazione delle quadriche di rotazione, la cui estrema importanza non può essere sfuggita a quanti si occupano di geometria differenziale.

Cercando di dimostrare questi teoremi, io mi sono collocato da un punto di vista più generale, che mi ha dato, insieme alle dimostrazioni dei teoremi di Guichard, altri nuovi risultati dei quali rileverò specialmente quelli che si collegano alla teoria della trasformazione delle superficie pseudosferiche. Per bene intendere il problema che tratto e risolvo nella presente Nota conviene ricordare un risultato fondamentale, dovuto a Beltrami [2], relativo ai sistemi di raggi normali ad una serie di superficie parallele ed uscenti dai punti di una superficie qualsiasi S, alla quale i raggi stessi si immaginano invariabilmente connessi in tutte le deformazioni per flessione della S. Si sa allora che se, in una speciale configurazione della S, si immaginano i raggi emananti dai suoi punti terminati ad una delle superficie Σ ortogonali, il luogo dei medesimi estremi, dopo una deformazione qualsiasi della S, non cessa mai di essere una superficie ortogonale ai raggi.

Ciò ricordato, il problema che vogliamo qui trattare è un caso particolare del seguente: *Per quali superficie* S *accadrà che il luogo* Σ *dei detti estremi rimanga in qualsiasi deformazione della* S *una superficie* W, *i cui raggi principali di curvatura siano legati costantemente dalla medesima relazione?*

(1) Comptes Rendus, 23 Janvier 1899, n.° 4.
(2) V. le mie: *Lezioni di geometria differenziale,* pag. 257.

Un caso ben noto in cui la detta proprietà si verifica è quello fornito dal celebre teorema di Weingarten ([1]), quando cioè la S è applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi sono le tangenti alle deformate dei meridiani.

Nella presente Nota, allo scopo di stabilire i teoremi di Guichard e gli altri, di cui sopra è fatto cenno, mi limiterò per altro a trattare un caso particolare del problema enunciato. Supporrò che la superficie S sia applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi emananti da ogni punto della superficie siano normali alle deformate dei paralleli ed in conseguenza, per la condizione che i raggi formino un sistema normale, sia costante l'angolo d'inclinazione dei raggi sulla superficie lungo ogni deformata di un parallelo ([2]). Supposte verificate queste condizioni, domandiamo: *È possibile determinare la superficie* S *in guisa che la superficie* Σ *luogo degli estremi dei segmenti, trasportati dalla* S *in ogni sua flessione, rimanga sempre una superficie d'area minima, ovvero una superficie a curvatura costante?*

La risposta è fornita completamente dai teoremi seguenti:

A) *Affinchè la* Σ *resti costantemente ad area minima è necessario e sufficiente che la* S *sia applicabile sul paraboloide di rotazione ed, in questa speciale configurazione della* S, *i raggi emanino dal fuoco ovvero dal punto all'infinito dell'asse; le lunghezze dei segmenti intercetti fra* S *e* Σ *eguagliano i corrispondenti raggi focali.*

B) *La superficie* Σ *resta a curvatura costante positiva allora e allora soltanto quando la* S *è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione ovvero sull'iperboloide di rotazione a due falde e i raggi emanano, in questa speciale configurazione di* S, *dall'uno o dall'altro dei due fuochi.*

C) *La superficie* Σ *resta a curvatura costante negativa solo quando la curva meridiana della superficie di rotazione, su cui la* S *è applicabile, è la curva esponenziale*

$$r = e^z,$$

ovvero la catenaria accorciata

$$r = m \cosh z \qquad (m < 1),$$

o in fine la curva

$$r = m \operatorname{senh} z;$$

ogni volta si hanno due diversi sistemi di raggi, che soddisfano alla questione, e nascono l'uno dall'altro per riflessione sulla superficie S.

I teoremi A) B), quando già si supponga la S applicabile sulla corrispondente quadrica di rotazione, dànno appunto i risultati di Guichard.

Quanto alle proposizioni contenute nel teorema C) esse stanno in relazione colla teoria della trasformazione delle superficie pseudosferiche; ma per ora non ne ho approfondito che un caso particolare, di cui sarà discorso più avanti.

([1]) V. *Lezioni* ecc., pag. 238.

([2]) Quando la S è conformata a superficie di rotazione i raggi emananti dai punti di un parallelo debbono quindi concorrere in un punto dell'asse.

§ 2. Per dimostrare i teoremi enunciati procederemo nel modo seguente. Sulla superficie S prendiamo a linee coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ rispettivamente le deformate dei paralleli e dei meridiani, onde si avrà per l' elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2 \qquad (r = \varphi(u)) . \tag{1}$$

Siano poi D, D′, D″ i coefficienti della 2^a forma fondamentale (1), i quali saranno legati dalla equazione di Gauss

$$\frac{DD'' - D'^2}{r} = - r'' , \tag{2}$$

indicando come faremo in seguito cogli accenti le derivate di funzioni della sola u; inoltre D, D′, D″ saranno legati dalle equazioni differenziali di Codazzi

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v}(rD) = \frac{\partial}{\partial u}(rD') \\ & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{r}\right) + Dr' . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Indichiamo poi con

$$\begin{matrix} (X_1 & Y_1 & Z_1) \\ (X_2 & Y_2 & Z_2) \\ (X_3 & Y_3 & Z_3) \end{matrix}$$

i coseni di direzione della terna ortogonale formata: 1°) dalla tangente alla linea $u = \text{cost.}$; 2°) dalla tangente alla $v = \text{cost.}$; 3°) dalla normale alla superficie. Avremo allora le note formole fondamentali

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X_2 , \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = r X_1 \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{D'}{r} X_3 , \qquad \frac{\partial X_2}{\partial u} = D X_3 , \qquad \frac{\partial X_3}{\partial u} = - D X_2 - \frac{D'}{r} X_1 \\ & \frac{\partial X_1}{\partial v} = - r' X_2 + \frac{D''}{r} X_3 , \; \frac{\partial X_2}{\partial v} = r' X_1 + D' X_3 , \; \frac{\partial X_3}{\partial v} = - \frac{D''}{r} X_1 - D' X_2 , \end{aligned} \right. \tag{5}$$

colle analoghe per y, z, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$.

Consideriamo ora il raggio che emana dal punto (x, y, z) di S ed è normale alla direzione (X_1, Y_1, Z_1) e sia σ l' angolo d' inclinazione di questo raggio sulla superficie, ove, per ipotesi, sarà σ funzione della sola u. I coseni di direzione

$$X, Y, Z$$

di detto raggio saranno dati manifestamente dalle formole

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3 \\ Y &= \cos\sigma\, Y_2 + \operatorname{sen}\sigma\, Y_3 \\ Z &= \cos\sigma\, Z_2 + \operatorname{sen}\sigma\, Z_3 \end{aligned} \right. \tag{6}$$

(1) V. *Lezioni*, cap. IV.

Un caso ben noto in cui la detta proprietà si verifica è quello fornito dal celebre teorema di Weingarten [1], quando cioè la S è applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi sono le tangenti alle deformate dei meridiani.

Nella presente Nota, allo scopo di stabilire i teoremi di Guichard e gli altri, di cui sopra è fatto cenno, mi limiterò per altro a trattare un caso particolare del problema enunciato. Supporrò che la superficie S sia applicabile sopra una superficie di rotazione e i raggi emananti da ogni punto della superficie siano normali alle deformate dei paralleli ed in conseguenza, per la condizione che i raggi formino un sistema normale, sia costante l'angolo d'inclinazione dei raggi sulla superficie lungo ogni deformata di un parallelo [2]. Supposte verificate queste condizioni, domandiamo: *È possibile determinare la superficie* S *in guisa che la superficie* Σ *luogo degli estremi dei segmenti, trasportati dalla* S *in ogni sua flessione, rimanga sempre una superficie d'area minima, ovvero una superficie a curvatura costante?*

La risposta è fornita completamente dai teoremi seguenti:

A) *Affinchè la* Σ *resti costantemente ad area minima è necessario e sufficiente che la* S *sia applicabile sul paraboloide di rotazione ed, in questa speciale configurazione della* S, *i raggi emanino dal fuoco ovvero dal punto all'infinito dell'asse; le lunghezze dei segmenti intercetti fra* S *e* Σ *eguagliano i corrispondenti raggi focali.*

B) *La superficie* Σ *resta a curvatura costante positiva allora e allora soltanto quando la* S *è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione ovvero sull'iperboloide di rotazione a due falde e i raggi emanano, in questa speciale configurazione di* S, *dall'uno o dall'altro dei due fuochi.*

C) *La superficie* Σ *resta a curvatura costante negativa solo quando la curva meridiana della superficie di rotazione, su cui la* S *è applicabile, è la curva esponenziale*

$$r = e^z,$$

ovvero la catenaria accorciata

$$r = m \cosh z \qquad (m < 1),$$

o in fine la curva

$$r = m \operatorname{senh} z;$$

ogni volta si hanno due diversi sistemi di raggi, che soddisfano alla questione, e nascono l'uno dall'altro per riflessione sulla superficie S.

I teoremi A) B), quando già si supponga la S applicabile sulla corrispondente quadrica di rotazione, dànno appunto i risultati di Guichard.

Quanto alle proposizioni contenute nel teorema C) esse stanno in relazione colla teoria della trasformazione delle superficie pseudosferiche; ma per ora non ne ho approfondito che un caso particolare, di cui sarà discorso più avanti.

(1) V. *Lezioni* ecc., pag. 238.

(2) Quando la S è conformata a superficie di rotazione i raggi emananti dai punti di un parallelo debbono quindi concorrere in un punto dell'asse.

§ 2. Per dimostrare i teoremi enunciati procederemo nel modo seguente. Sulla superficie S prendiamo a linee coordinate $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ rispettivamente le deformate dei paralleli e dei meridiani, onde si avrà per l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2 \qquad (r = \varphi(u)) . \tag{1}$$

Siano poi D, D′, D″ i coefficienti della 2ª forma fondamentale [1], i quali saranno legati dalla equazione di Gauss

$$\frac{\mathrm{D}\mathrm{D}'' - \mathrm{D}'^2}{r} = -r'' , \tag{2}$$

indicando come faremo in seguito cogli accenti le derivate di funzioni della sola u; inoltre D, D′, D″ saranno legati dalle equazioni differenziali di Codazzi

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v}(r\mathrm{D}) = \frac{\partial}{\partial u}(r\mathrm{D}') \\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{D}''}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{D}'}{r}\right) + \mathrm{D}r' . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Indichiamo poi con

$$(\mathrm{X}_1\ \mathrm{Y}_1\ \mathrm{Z}_1)$$
$$(\mathrm{X}_2\ \mathrm{Y}_2\ \mathrm{Z}_2)$$
$$(\mathrm{X}_3\ \mathrm{Y}_3\ \mathrm{Z}_3)$$

i coseni di direzione della terna ortogonale formata: 1°) dalla tangente alla linea $u = \text{cost.}$; 2°) dalla tangente alla $v = \text{cost.}$; 3°) dalla normale alla superficie. Avremo allora le note formole fondamentali

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{X}_2 , \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = r\mathrm{X}_1 \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u} = \frac{\mathrm{D}'}{r}\mathrm{X}_3 , \quad \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u} = \mathrm{D}\mathrm{X}_3 , \quad \frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u} = -\mathrm{D}\mathrm{X}_2 - \frac{\mathrm{D}'}{r}\mathrm{X}_1 \\ &\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v} = -r'\mathrm{X}_2 + \frac{\mathrm{D}''}{r}\mathrm{X}_3 , \quad \frac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial v} = r'\mathrm{X}_1 + \mathrm{D}'\mathrm{X}_3 , \quad \frac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial v} = -\frac{\mathrm{D}''}{r}\mathrm{X}_1 - \mathrm{D}'\mathrm{X}_2 , \end{aligned} \right. \tag{5}$$

colle analoghe per y, z, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$.

Consideriamo ora il raggio che emana dal punto (x, y, z) di S ed è normale alla direzione $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1)$ e sia σ l'angolo d'inclinazione di questo raggio sulla superficie, ove, per ipotesi, sarà σ funzione della sola u. I coseni di direzione

$$\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$$

di detto raggio saranno dati manifestamente dalle formole

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} &= \cos\sigma\, \mathrm{X}_2 + \operatorname{sen}\sigma\, \mathrm{X}_3 \\ \mathrm{Y} &= \cos\sigma\, \mathrm{Y}_2 + \operatorname{sen}\sigma\, \mathrm{Y}_3 \\ \mathrm{Z} &= \cos\sigma\, \mathrm{Z}_2 + \operatorname{sen}\sigma\, \mathrm{Z}_3 \end{aligned} \right. \tag{6}$$

[1] V. *Lezioni*, cap. IV.

Costruiamo ora per il sistema di raggi le quantità fondamentali di Kummer (¹):

$$\mathrm{E}\,,\,\mathrm{F}\,,\,\mathrm{G}\,,\;e\,,f\,,f'\,,g\,.$$

Per questo derivando le (6). otteniamo per le (5)

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial u} = -\dfrac{\mathrm{D}'}{r}\operatorname{sen}\sigma\,\mathrm{X}_1 - \operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma')\,\mathrm{X}_2 + \cos\sigma(\mathrm{D}+\sigma')\,\mathrm{X}_3 \\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial v} = \left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)\mathrm{X}_1 - \mathrm{D}'\operatorname{sen}\sigma\,\mathrm{X}_2 + \mathrm{D}'\cos\sigma\,\mathrm{X}_3\,, \end{cases}$$

onde seguono le formole:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{E} = (\mathrm{D}+\sigma')^2 + \dfrac{\mathrm{D}'^2}{r^2}\operatorname{sen}^2\sigma\,,\quad \mathrm{F} = \mathrm{D}'(\mathrm{D}+\sigma') - \dfrac{\mathrm{D}'}{r}\operatorname{sen}\sigma\left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right), \\[2mm] \mathrm{G} = \mathrm{D}'^2 + \left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)^2,\quad e = -\operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma'),\; f = f' = -\mathrm{D}'\operatorname{sen}\sigma, \\[2mm] \qquad\qquad g = r\left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right). \end{cases}$$

L' essere $f = f'$ significa che la congruenza è normale, come già sapevamo, e poichè si ha

$$\mathrm{U} = \sum \mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\sigma\,,\quad \mathrm{V} = \sum \mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial v} = 0\,,$$

le coordinate $\overline{x}\,,\overline{y}\,,\overline{z}$ di un punto mobile sopra una delle superficie $\sum$ normali ai raggi saranno dati (²) dalle formole

$$(8^\star)\qquad \overline{x} = x + t\mathrm{X}\,,\quad \overline{y} = y + t\mathrm{Y}\,,\quad \overline{z} = z + t\mathrm{Z}\,,$$

ove si è posto

$$(9)\qquad t = \mathrm{C} - \int \cos\sigma\, du\,,$$

con C costante arbitraria. Ora per determinare le ascisse $\varrho_1\,,\varrho_2$ dei due fuochi abbiamo l' equazione di 2° grado

$$(10)\qquad (\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\,\varrho^2 + [g\mathrm{E} - (f+f')\,\mathrm{F} + e\mathrm{G}]\,\varrho + eg - ff' = 0\,,$$

le cui radici sono appunto $\varrho_1\,,\varrho_2$. Pei valori dei coefficienti di questa equazione troviamo subito dalle (8):

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{EG}-\mathrm{F}^2 = \left\{(\mathrm{D}+\sigma')\left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right) + \dfrac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma\right\}^2 \\[2mm] g\mathrm{E} - (f+f')\,\mathrm{F} + e\mathrm{G} = \mathrm{D}'^2\operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma') - \operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma')\left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right)^2 + \\[2mm] \qquad + (\mathrm{D}+\sigma')^2\, r\left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right) - \dfrac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}^2\sigma\left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right) \\[2mm] eg - ff' = -r\operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma')\left(r'\cos\sigma - \dfrac{\mathrm{D}''\operatorname{sen}\sigma}{r}\right) - \mathrm{D}'^2\operatorname{sen}^2\sigma\,. \end{cases}$$

(¹) V. *Lezioni*, ecc., capo X.

(²) *Id.*, pag. 256.

§ 3. Stabilite queste formole fondamentali, passiamo alla nostra ricerca e supponiamo dapprima che la superficie $\sum$ normale ai raggi data dalla (8*) si mantenga, in tutte le flessioni della S, *superficie d'area minima*. Siccome i suoi raggi principali di curvatura sono dati da

$$r_1 = \varrho_1 - t\,, \quad r_2 = \varrho_2 - t\,,$$

dovremo avere

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2t\,,$$

ossia

$$2t(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2) + g\mathrm{E} - (f+f')\,\mathrm{F} + e\mathrm{G} = 0\,. \tag{12}$$

In questa sostituiamo per $\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2$, $g\mathrm{E}-(f+f')\,\mathrm{F}+e\mathrm{G}$ i valori (11), dai quali mediante l'equazione (2) di Gauss eliminiamo D″. Resta così una relazione in termini finiti fra D, D′ e siccome la supponiamo verificata in tutte le flessioni della S, si vede facilmente che deve essere identicamente verificata. Ed infatti, durante le flessioni di S, le quantità D, D′ sono unicamente legate dalle due equazioni a derivate parziali del 1° ordine (3), dalle quali pensiamo eliminato D″ per mezzo della (2); una relazione costante in termini finiti fra D, D′ lascerebbe sussistere, al massimo, nella totalità delle flessioni una sola funzione arbitraria. Facendo effettivamente nella (12) la detta sostituzione, moltiplicando l'equazione per D^2 ed eliminando D″, troviamo:

$$\begin{aligned}2t\Big\{(\mathrm{D}+\sigma')\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big) + \frac{\mathrm{DD}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma\Big\}^2 + \mathrm{D}^2\mathrm{D}'^2\operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma') - \\ - \operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma')\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big)^2 + \\ + r\mathrm{D}(\mathrm{D}+\sigma')^2\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big) - \\ - \frac{\mathrm{DD}'^2}{r}\operatorname{sen}^2\sigma\Big(\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma\Big) = 0\,.\end{aligned}$$

Pongasi ora per brevità

$$\mathrm{D}r'\cos\sigma - \frac{\mathrm{D}'^2}{r}\operatorname{sen}\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma = \mathit{\Delta}$$

e se ne tragga D'^2 in funzione di D e $\mathit{\Delta}$ colla formola

$$\frac{\mathrm{D}'^2\operatorname{sen}\sigma}{r} = \mathrm{D}r'\cos\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma - \mathit{\Delta}\,;$$

la precedente diviene:

$$\begin{aligned}2t\,\{\mathrm{D}^2r'\cos\sigma + \mathrm{D}r''\operatorname{sen}\sigma + \sigma'\mathit{\Delta}\}^2 + r\mathrm{D}^2(\mathrm{D}+\sigma')(\mathrm{D}r'\cos\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma - \mathit{\Delta}) \\ - \operatorname{sen}\sigma(\mathrm{D}+\sigma')\mathit{\Delta}^2 + r\mathrm{D}(\mathrm{D}+\sigma')^2\mathit{\Delta} - \operatorname{sen}\sigma\mathrm{D}\mathit{\Delta}(\mathrm{D}r'\cos\sigma + r''\operatorname{sen}\sigma - \mathit{\Delta}) = 0\,,\end{aligned}$$

che deve risultare *identica* in D e $\mathit{\Delta}$. Ne seguono le condizioni necessarie e sufficienti

$$2t\sigma' = \operatorname{sen}\sigma \tag{13}$$

$$2tr'\cos\sigma + r = 0 \tag{14}$$

$$2tr''\operatorname{sen}\sigma + r\sigma' = 0 \tag{15}$$

$$4tr'\sigma'\cos\sigma + r\sigma' - r'\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma = 0 \tag{16}$$

$$4t\sigma'\operatorname{sen}\sigma\, r'' + r\sigma'^2 - \operatorname{sen}^2\sigma\, r'' = 0\,. \tag{17}$$

Restano dunque soltanto da soddisfarsi le (22), (23*), (24*), (27). Intanto la (23*) ci dà ancora

$$r = c \cot\sigma\,, \tag{28}$$

indi la (24*) diventa

$$t = \frac{\sigma' \cos\sigma}{3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2 - \sigma''}\,. \tag{29}$$

Sostituendo nella (27), troviamo per σ l'equazione differenziale

$$\frac{d}{du}\log(3\cot\sigma\,.\,\sigma'^2 - \sigma'') = \frac{d}{du}\log(\operatorname{sen}^3\sigma\cos\sigma)\,,$$

da cui integrando risulta

$$3\cot\sigma\,.\,\sigma - \sigma'' = h\operatorname{sen}^3\sigma\cos\sigma\,,\quad \text{essendo } h \text{ una costante.} \tag{30}$$

La (29) si cangia quindi nell'altra

$$t = \frac{\sigma'}{h\operatorname{sen}^3\sigma} \tag{31}$$

e la (22) ci dà allora per σ l'equazione differenziale del 1° ordine

$$\frac{\sigma'^2}{h^2\operatorname{sen}^6\sigma} = \mathrm{A} + \frac{1}{h\operatorname{sen}^2\sigma}\,, \tag{32}$$

che trae seco, come conseguenza differenziale, la (30).

Restando A affatto arbitraria, il nostro problema ammette dunque sempre soluzioni, che si ottengono prendendo per σ un integrale della (32), indi assumendo r dalla (28) e t dalla (31).

§ 5. Vogliamo ora esaminare quale è la superficie di rotazione corrispondente, nella qual cosa resta, come sopra, a nostra disposizione la costante c. Dalla (32) ricaviamo

$$du^2 = \frac{d\sigma^2}{h\operatorname{sen}^4\sigma(1 + h\mathrm{A}\operatorname{sen}^2\sigma)}$$

e quindi per l'elemento lineare della superficie di rotazione

$$ds^2 = \frac{d\sigma^2}{h\operatorname{sen}^4\sigma(1 + h\mathrm{A}\operatorname{sen}^2\sigma)} + c^2\cot^2\sigma\, dv^2\,.$$

Per determinare la curva meridiana

$$z = \psi(r)$$

abbiamo la equazione

$$1 + \psi'^2(r) = \frac{1 + \frac{r^2}{c^2}}{k^2 h\left(1 + h\mathrm{A} + \frac{r^2}{c^2}\right)}\,,$$

ossia

$$\psi'^2(r) = \frac{(1 - c^2 h)\left(1 + \frac{r^2}{c^2}\right) - h^2 c^2 \mathrm{A}}{c^2 h\left(1 + h\mathrm{A} + \frac{r^2}{c^2}\right)}\,. \tag{33}$$

Separiamo ora i due casi di $A > 0$ ovvero $A < 0$. Trattando in questo paragrafo il primo caso, poniamo, ciò che non altera la generalità, $A = 1$, onde

$$\psi'^2(r) = \frac{1 - c^2 h(h+1) + \frac{1 - c^2 h}{c^2} r^2}{c^2 h(h+1) + hr^2}.$$

Volendo superficie *reali*, occorrerà che sia $h(h+1) > 0$, chè altrimenti risulterebbe $\psi'^2(r)$ negativo. Ora disponiamo di c ponendo

$$c^2 = \frac{1}{h(h+1)},$$

indi

$$\psi'(r) = \frac{hr}{\sqrt{1 + hr^2}}$$

e però

$$z = \psi(r) = \sqrt{1 + hr^2},$$

ossia

$$z^2 - hr^2 = 1.$$

Ora se $h < 0$, pongasi $h = -\frac{1}{a^2}$ e a causa di $h(h+1) > 0$ sarà $a < 1$; la curva meridiana sarà in tal caso l'ellisse

$$z^2 + \frac{r^2}{a^2} = 1$$

e l'asse di rotazione sarà l'asse maggiore di lunghezza $= 2$.

Quando h sia positivo pongasi $h = \frac{1}{a^2}$ e si avrà per curva meridiana l'iperbole

$$z^2 - \frac{r^2}{a^2} = 1,$$

l'asse trasverso, di lunghezza $= 2$, coincidendo coll'asse di rotazione. Le formole

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{c}{r} = \pm \frac{1}{\sqrt{h(h+1)} \, . \, r}$$

dimostrano poi che i raggi emanano dall'uno o dall'altro dei due fuochi. Il nostro teorema B) è così completamente dimostrato.

§ 6. Veniamo ora al caso della curvatura negativa e facciamo senz'altro $A = -1$. La (33) diventa

$$\psi'^2(r) = \frac{1 - c^2 h + c^2 h^2 + \frac{1 - c^2 h}{c^2} r^2}{c^2 h(1-h) + hr^2},$$

dove, per avere curve reali, dovrà supporsi h positivo, come risulta anche del resto dalla (32). Poniamo

$$h = a^2, \quad c = \pm \frac{1}{a}$$

ed avremo

$$\psi'(r) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 + a^2 r^2}}.$$

Distinguiamo ora secondo che $a = 1$, ovvero $a \neq 1$.

1°. Per $a = 1$ la curva meridiana è la curva esponenziale

$$(\alpha) \qquad r = e^z.$$

Le formole

$$\operatorname{tg} \sigma = \pm \frac{1}{r}, \quad t = r$$

dimostrano che i raggi emananti dai punti della superficie sono i raggi stessi dei paralleli, ovvero i loro riflessi, e i segmenti intercetti fra S e Σ hanno lunghezza eguale al raggio del parallelo (1). Possiamo quindi enunciare il teorema seguente:

Nella superficie S *di rotazione attorno all'asse* z *che ha per meridiano la curva esponenziale* $r = e^z$ *si immaginino disposti su tutti i raggi dei paralleli altrettanti segmenti terminati alla* S *ed al centro rispettivo; si fletta comunque la* S *che seco trasporti i detti segmenti invariabilmente connessi, ai loro punti di partenza da* S, *alla* S *medesima. Dopo la deformazione il luogo degli estremi liberi dei segmenti sarà una superficie pseudosferica normale ai segmenti ed una seconda superficie pseudosferica si otterrà riflettendo i segmenti stessi sulla superficie e prendendo il luogo dei termini dei segmenti riflessi.*

2°. Sia $a \neq 1$. Allora per equazione della curva meridiana troviamo

$$(\beta) \qquad r = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \cosh z, \quad \text{se } a > 1$$

$$(\gamma) \qquad r = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a} \operatorname{senh} z, \quad \text{se } a < 1.$$

La curva (β) deriva evidentemente dalla catenaria comune accorciando tutte le ordinate normalmente alla direttrice in un rapporto costante e può dirsi la *catenaria accorciata*.

A ciascuna delle ∞^1 superficie di rotazione con curve meridiane (β) o (γ) si coordinano due sistemi di raggi, riflessi l'uno dell'altro, che trasportati dalla relativa superficie, in qualsiasi sua deformazione, dànno sempre luogo alle normali di due superficie pseudosferiche.

(1) Si osservi che se la S ha la forma di rotazione, una delle due superficie pseudosferiche derivate è l'ordinaria pseudosfera mentre l'altra si riduce all'asse di rotazione.

§ 7. Limitandoci per ora ad esaminare il caso della superficie esponenziale di rotazione, vediamo in qual modo dipendono fra loro le due superficie pseudosferiche che si ottengono, secondo il paragrafo precedente, da ogni sua deformata S. Siano Σ', Σ'' queste due superficie pseudosferiche e sia Σ la superficie complementare di S rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani, cioè la seconda falda focale della congruenza delle tangenti a queste geodetiche. Dalle mie antiche ricerche risulta che anche la Σ è una superficie pseudosferica e con semplici considerazioni geometriche si può stabilire che *le due superficie pseudosferiche* Σ', Σ'' *sono ambedue complementari della* Σ.

Inversamente sussiste il teorema:

Prese due superficie pseudosferiche Σ', Σ'' *complementari di una medesima* Σ *le normali a* Σ', Σ'' *in due punti corrispondenti* (*normali che giacciono nel medesimo piano tangente di* Σ) *si incontrano in un punto* P; *il luogo di questo punto* P *è una superficie applicabile sulla superficie esponenziale di rotazione e le due superficie* S, Σ *sono complementari l'una dell'altra.*

Queste singolari proprietà della superficie esponenziale di rotazione dànno luogo bensì, come si vede, ad un modo di trasformazione delle superficie pseudosferiche, che coincide peraltro colla trasformazione complementare.

Rimane ora da vedere se le analoghe proprietà delle altre superficie di rotazione dei tipi (β) (γ) dànno luogo ad altri modi di trasformazione delle superficie pseudosferiche, ovvero riconducono a trasformazioni già note. La prima ipotesi sembra la più probabile, ma se anche sussistesse la seconda il risultato non cesserebbe di presentare un certo interesse poichè ci darebbe modo di trovare infinite deformate per flessione delle superficie di rotazione dei tipi (β) e (γ).

La decisione di questa e di molte altre questioni che naturalmente si collegano ai teoremi della presente Nota deve rimanere riservata ad ulteriori ricerche.

AGGIUNTA.

Dopo la presentazione della presente Nota ho cominciato alcune ricerche più generali che, nel caso delle superficie minime danno il seguente teorema più generale del teorema A): *Se da ciascun punto* M *di una superficie* S *parte un segmento* MM' *ed il luogo degli estremi* M' *è una superficie minima ortogonale ai raggi, la condizione necessaria e sufficiente perchè la medesima proprietà si conservi in tutte le flessioni della* S, *alla quale i segmenti* MM' *si immaginano invariabilmente collegati, è che la* S *sia applicabile sul paraboloide di rivoluzione ed, eseguita questa applicazione, i segmenti* MM' *concorrano nel fuoco, ovvero si dispongano parallelamente all'asse, avendo ciascuno lunghezza eguale al corrispondente raggio focale.*