ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Matematica. — *Di un' equazione funzionale simbolica e di alcune sue conseguenze.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

Sono note alcune trasformazioni usate nella teoria delle equazioni differenziali lineari per ridurre certe classi di tali equazioni a tipi integrabili. Sono particolarmente importanti le trasformazioni di Laplace e di Eulero (1), la prima delle quali ha guidato in modo così notevole, per opera specialmente del Poincaré (2), alla conoscenza delle equazioni ad integrali irregolari. Queste trasformazioni sono operazioni funzionali distributive, definite da certe loro proprietà caratteristiche cui si può dare la forma di equazioni funzionali simboliche, e dalle quali si deducono in modo assai semplice, le ulteriori proprietà delle operazioni medesime (3). Delle due operazioni citate, la operazione di Laplace è di gran lunga quella il cui comportamento appare più strano: essa ha di fronte all' operazione di Eulero un carattere che si potrebbe dire di trascendenza, ed il dott. Amaldi, nella citata sua Nota, ha riscontrato due determinazioni, o come egli si esprime con giusto criterio di analogia, due *rami* di questa operazione, rami il cui legame fra di loro non appare a prima giunta evidente. In quanto all' operazione di Eulero, essa non differisce in sostanza da quella di derivazione ad indice qualunque, intuita dal Leibniz, introdotta nella scienza dal Liouville e studiata da numerosi autori (4), sebbene piuttosto con intendimento di pura curiosità che in vista di possibili applicazioni; nè credo che ne sia stata notata l' identità, cui ora accennava, con l' operazione di Eulero, così feconda invece di applicazioni, gran parte delle quali risalgono a noti lavori dell' Heine (5).

Nella presente Nota, studio un' equazione simbolica generale che contiene come casi particolari quelle cui soddisfano le citate due operazioni. Ricerco quale è la multiplicità di determinazioni dell' operazione definita da una tale equazione; trovo lo sviluppo in serie della soluzione generale dell' equazione stessa, e faccio infine l' applicazione ai due casi speciali di cui si è discorso, e a qualche altro caso particolare notevole. Oltre all' interesse

(1) Su queste trasformazioni, v. Schlesinger, *Handbuch der Lineardiff. Gleichungen*, Bd I, Abschn. VII, Kap. 4 e Bd. II, Abschn. XII. Nella stessa opera (indice) si trova una estesa bibliografia dell' argomento.

(2) Americ. Journ. der Math., T. VII e Acta Math., T. VIII.

(3) V. Amaldi, *Sulla trasformazione di Laplace*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, T. VII, agosto 1898; e una mia lettera allo Schlesinger, Journ. fur die r. und ang. Mathematik, Bd. 119, s. 347.

(4) Riemann, Holmgren, Spitzer, Oltramare, Bourlet ed altri.

(5) Nei T. LX, LXI e LXII del Journ. für die r. und ang. Mathematik.

intrinseco che presenta l'equazione di cui si occupa questo lavoro, mi pare che essa ne offra anche uno di indole generale, poichè essa porge l'occasione di trasportare in una regione più vasta, ed in cui le possibili combinazioni sono straordinariamente moltiplicate, quelle considerazioni e quei metodi — compreso quello tanto semplice e fecondo dei coefficienti indeterminati — che sembravano esclusivi della teoria delle funzioni analitiche.

1. Sia X il simbolo di un'operazione funzionale distributiva, X′ la sua derivata funzionale [1], cioè, essendo φ una funzione analitica arbitraria,

$$X'(\varphi) = X(x\varphi) - xX(\varphi).$$

Mi propongo di studiare l'operazione definita dall'equazione simbolica

$$FX' = GX\,, \tag{1}$$

essendo F e G due espressioni (o forme) differenziali lineari, di ordine qualunque m, quest'ordine potendosi senza restrizione supporre uguale per entrambi. Essendo D il simbolo solito della derivazione ordinaria, sarà dunque

$$F = \alpha_0 D^m + \alpha_1 D^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} D + \alpha_m D^0\,,$$
$$G = \beta_0 D^m + \beta_1 D^{m-1} + \cdots + \beta_{m-1} D + \beta_m D^0\,.$$

2. Cerchiamo quale relazione passi fra due operazioni X, Y soddisfacenti alla stessa equazione (1). Poniamo Y = XK, dove K è una nuova operazione; verrà [2], denotando cogli accenti le derivazioni funzionali:

$$FX'K + FXK' = GXK\,.$$

Ma dalla (1) si ha, qualunque sia la funzione su cui si opera:

$$FX'K = GXK\,,$$

onde segue, per ogni funzione soggetta alle operazioni indicate:

$$FXK' = 0\,, \quad \text{onde } K' = 0\,,$$

e quindi [3] K è la semplice operazione di moltiplicazione.

Se dunque $X(\varphi)$, applicata alla funzione arbitraria φ, soddisfa all'equazione (1), anche $X(\mu\varphi)$, considerata come operazione applicata alla stessa funzione, soddisfa alla medesima equazione.

3. Essendo μ una funzione analitica qualsivoglia, indichiamo con α una serie ordinata per le potenze crescenti di x. In questa serie si può con-

(1) Vedi il mio *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif*, Math. Annal., Bd. XLIX, 1897. In ciò che segue, quel lavoro verrà citato colla lettera *M* seguita dal numero del paragrafo. Come in quella memoria, le maiuscole romane indicano operazioni distributive, le minuscole greche indicano funzioni, le minuscole romane indicano numeri, reali o complessi.

(2) *M*, § 58.

(3) *M*, § 60, *a*).

siderare l'*intensità* della convergenza, riguardando come più intensamente convergente quella serie che ha raggio di convergenza maggiore, e a parità di raggio, quella serie che una operazione A definita da $A(x^n) = a_n x^n$ muta in serie avente maggiore raggio di convergenza [1]. Una funzione della forma $\alpha\mu$ si potrà dire allora tanto più *prossima* a μ quanto più sarà intensamente convergente la serie α; le più prossime, in questo senso, saranno le $x\mu$, $(a + bx)\mu$, $(a + bx + cx^2)\mu$, ...; poi le $\alpha\mu$ in cui α è trascendente intera, ecc.

L'insieme delle funzioni $\alpha\mu$ dove le α sono tutte le serie di potenze convergenti più intensamente di una serie data α, costituisce ciò che chiamerò un *intorno* della funzione μ; a questo intorno appartengono certamente tutte le funzioni $x^n\mu$ e le loro combinazioni lineari in numero finito. Ho già considerato simili intorni al § 64 del ricordato *Mémoire* [2].

4. Ora, per ogni operazione distributiva X vale, come ho dimostrato [3], in un intorno conveniente di una funzione μ, lo sviluppo (analogo alla serie di Taylor nella teoria delle funzioni) in serie assolutamente ed uniformemente convergente:

$$(2)\quad X(\varphi\mu) = X(\mu)\,\varphi + X'(\mu)\,\varphi' + \frac{1}{1\,.\,2}X''(\mu)\,\varphi'' + \cdots \frac{1}{n\,!}X^{(n)}(\mu)\,\varphi^{(n)} + \cdots,$$

dove si è posto $\varphi' = D\varphi$, $\varphi'' = D^2\varphi$, ecc.

Se la X deve soddisfare alla equazione (1), questa equazione stessa, derivata successivamente, ci fornisce i coefficienti dello sviluppo (2); si ha infatti, derivando funzionalmente la (1) [4]:

$$FX'' = (G - F')\,X' + G'X\,,$$
$$FX''' = (G - 2F')\,X'' + (2G' - F'')\,X' + G''X\,,$$

e in generale, indicando con (n_m) l' $m + 1^{\text{simo}}$ coefficiente della potenza n^{sima} del binomio:

$$(3)\quad FX^{(n+1)} = (G - nF')\,X^{(n)} + (nG' - (n_2)\,F'')\,X^{(n-1)} + \cdots$$
$$\cdots\,((n_{m-1})\,G^{(m-1)} - (n_m)\,F^{(m)})\,X^{(n-m+1)} + (n_m)\,G^{(m)}X^{(n-m)}\ [5]\,.$$

Questa è una relazione ricorrente che permette di determinare successivamente le funzioni $X'(\mu)$, $X''(\mu)$, ... restando arbitraria la sola $X(\mu)$, che indicheremo con λ_0. Ma la determinazione delle successive $X^{(n)}(\mu)$ mediante

[1] Questo concetto verrà più ampiamente svolto e discusso in un prossimo lavoro.

[2] Cfr. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, T. XI: *Sulle serie procedenti secondo le derivate successive* ecc., § 4.

[3] *M.*, § 61.

[4] *M.*, § 58.

[5] Si noti l'analogia di forma fra questa e l'equazione ipergeometrica generalizzata od equazione di Pochhammer. Nonostante la diversità dei simboli, la (3) si può ridurre a quella equazione differenziale particolarizzando opportunamente i simboli stessi

la (3) (che è, rispetto ad esse, un' equazione lineare mista differenziale e alle differenze) non è univoca, come si vede facilmente. Infatti dalla (1) deduciamo

$$X'(\mu) = F^{-1}GX(\mu),$$

ossia $X'(\mu) = F^{-1}G\lambda_0$; in altri termini, la $X'(\mu)$ si ottiene da λ_0 mediante la risoluzione di un' equazione differenziale lineare non omogenea di cui F è il primo membro; essa è quindi determinata all' infuori di una funzione ω_1 contenente linearmente m costanti arbitrarie, funzione che è l' integrale generale dell' equazione omogenea $F = 0$. In particolare, se λ_0 ed i coefficienti di G sono funzioni analitiche regolari nell' intorno di $x = 0$, si può prendere come una delle determinazioni di $X'(\mu)$ l' integrale principale λ_1 (1) dell' equazione non omogenea, e si avrà per determinazione generale

$$X'(\mu) = \lambda_1 + \omega_1 .$$

Analogamente, determinata che sia $X'(\mu)$, la $X''(\mu)$ resterà determinata mediante una analoga equazione differenziale lineare non omogenea, avente per primo membro F, e così via, per modo che $X^{(n)}(\mu)$ conterrà linearmente nm costanti arbitrarie.

5. Come si vede, indicando con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ una serie di speciali determinazioni delle $X(\mu), X'(\mu), X''(\mu), \ldots$, dove λ_0 è arbitraria, se ne deduce che la determinazione generale delle medesime è

$$\lambda_0, \ \lambda_1 + \omega_1, \ \lambda_2 + \omega_2, \ldots,$$

dove le $\omega_1, \omega_2, \ldots$ soddisfano alla stessa equazione ricorrente (3), colla determinazione iniziale $\omega_0 = 0$; cioè esse sono date dal sistema:

$$\begin{cases} F(\omega_1) = 0, \\ F(\omega_2) = (G - F')\,\omega_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(\omega_{n+1}) = (G - nF')\,\omega_n + (nG' - (n_2)\,F'')\,\omega_{n-1} + \cdots + (n_m)\,G^{(m)}\omega_{n-m}. \end{cases}$$

È da notare che la risoluzione dell' equazione mista (3), che fornisce le successive $X^{(n)}(\mu)$, richiede l' aggiunzione dei soli campi di trascendenza che provengono dall' integrazione successiva di equazioni aventi F per primo membro.

6. Abbiamo dunque imparato a determinare l' espressione analitica dell' operazione definita dall' equazione (1), sotto forma di uno sviluppo in serie ordinato per le derivate successive della funzione arbitraria, e convergente assolutamente ed uniformemente in un intorno della funzione data μ. Per $\varphi = 1$, quello sviluppo dà $X(\mu) = \lambda_0$; pertanto, ad una funzione arbitraria

(1) *Hauptintegral* degli autori tedeschi. Per la sua determinazione, v. *M.*, §§ 110 e segg.

μ l'operazione X può fare corrispondere una funzione pure arbitraria λ_0. Ciò è analogo a quanto accade, nella teoria delle funzioni, per le equazioni differenziali del prim'ordine: se $y = \varphi(x)$ è l'integrale generale di una simile equazione, si può fissare ad arbitrio il valore y_0 di y che corrisponde ad un dato valore x_0 di x.

7. Dirò *ramo* dell'operazione X l'insieme delle sue determinazioni per le quali ad una funzione data μ corrisponde una funzione parimente data λ_0. Siano X_1, X_2 due simili determinazioni: posto $X_3 = X_2 - X_1$, si avrà

$$X_3(\mu\varphi) = \omega_1\varphi' + \frac{\omega_2}{1.2}\varphi'' + \cdots + \frac{\omega_n}{n!}\varphi^{(n)} + \cdots; \tag{4}$$

la X_3 è un ramo dell'operazione che ammette come radice la funzione data μ.

In particolare, si può considerare quel ramo di X che fa corrispondere ad una costante una costante: $X(1) = 1$. Si ottiene allora lo sviluppo, valido nell'intorno della costante

$$X(\varphi) = \varphi + \lambda_1\varphi' + \frac{1}{1.2}\lambda_2\varphi'' + \cdots,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ è la successione di funzioni determinata, all'infuori delle addittive $\omega_1, \omega_2, \ldots$, dal sistema (3) colla condizione iniziale $\lambda_0 = 1$. Fissata la determinazione di ogni λ_n, resta fissata quella delle $X(x^n) = \xi_n$, legate colle λ_n da

$$\xi_n = \lambda_n + n\,x\,\lambda_{n-1} + (n_2)\,x^2\lambda_{n-2} + \cdots + nx^{n-1}\lambda_1 + x^n. \tag{5}$$

8. Applichiamo la teoria generale svolta nelle poche righe precedenti ad alcune equazioni particolari della forma (1), e consideriamo dapprima il caso in cui la forma differenziale lineare F che figura nel primo membro della (1) si riduce all'ordine zero, nel quale caso non ha più luogo la moltiplicità di determinazioni delle λ_n dall'equazione mista differenziale e alle differenze (3), poichè questa moltiplicità è dovuta, come si è visto, alla determinazione molteplice della F^{-1}.

L'equazione (1) si riduce, in questo caso, a

$$X' = GX; \tag{6}$$

il sistema ricorrente (3) è dato da

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = G\lambda_0, \\ \lambda_2 = G\lambda_1 + G'\lambda_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_{n+1} = G\lambda_n + nG'\lambda_{n-1} + \cdots (n_{m-1})\,G^{(m-1)}\lambda_{n-m+1} + (n_m)\,G^m\lambda_{n-m}; \end{array}\right. \tag{7}$$

le λ_n sono determinate senza ambiguità quando sia fissata la λ_0. Talchè, quando sia stabilito il ramo della X che si considera mediante la posizione

$X(\mu) = \lambda_0$, lo sviluppo in serie (2) resta fissato senza ambiguità nei suoi coefficienti; in questo caso, la determinazione delle λ_n non richiede l'aggiunzione di alcun campo di trascendenza a quello di λ_0 e dei coefficienti di G.

9. Supponiamo che un'operazione X, soddisfacente alla equazione (6), ammetta una radice μ. Sarà allora $\lambda_0 = 0$, e quindi, per le (7), tutte le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ saranno identicamente nulle. Essendo dunque $X'(\mu)=0$, $X''(\mu)=0, \ldots$, sarà $X(x\mu) = 0$, $X(x^2\mu) = 0, \ldots$, e quindi le funzioni $\mu, x\mu, x^2\mu, \ldots$ e tutte le loro combinazioni lineari, saranno radici di X, la quale ammetterà pertanto uno spazio lineare di radici formato da tutti gli elementi di un intorno di μ. Manca in tale caso, per $X(\varphi\mu)$, uno sviluppo in serie della forma (2); questo fatto si può esprimere dicendo che l'operazione X è *singolare* nell'intorno di μ, o che μ è un *elemento singolare* di X.

In particolare, sostituendo ad $X(\varphi)$ il ramo $X(\mu\varphi) = X_1(\varphi)$, questo ammette come radice $\varphi = 1$, $\varphi = x$, $\varphi = x^2, \ldots$, e quindi tutto un intorno S della costante; la costante è, in questo caso, una singolarità di X_1.

10. Mostriamo però come sia possibile di ottenere come segue un'espressione analitica per X_1 anche quando essa è singolare nell'intorno della costante. All'uopo, si indichi con σ una funzione che non sia radice di X_1, e si consideri, essendo α un elemento di S:

$$X_1(\alpha) = X_1\left(\frac{\alpha\sigma}{\sigma}\right);$$

questa si sviluppa (M, § 63) in

$$X_1(\alpha) = X_1(\sigma)\frac{\alpha}{\sigma} + X_1'(\sigma)\, D\frac{\alpha}{\sigma} + \frac{1}{1.2} X''_1(\sigma)\, D^2\frac{\alpha}{\sigma} + \cdots;$$

ora

$$D\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\left(\alpha' - \frac{\sigma'}{\sigma}\alpha\right)$$

ed indicando con $E(\alpha)$ la forma di prim'ordine

$$\alpha' - \frac{\sigma'}{\sigma}\alpha,$$

viene, come si verifica immediatamente:

$$D\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}E(\alpha),\ D^2\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}E^2(\alpha), \ldots D^n\frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}E^n(\alpha).$$

Si ottiene così lo sviluppo:

$$(8) \qquad X_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma}\left(X_1(\sigma)\,\alpha + X'_1(\sigma)\,E\alpha + \frac{1}{1.2}X''_1(\sigma)\,E^2\alpha + \cdots\right),$$

in cui le $X'_1(\sigma), X''_1(\sigma), \ldots$ sono determinate univocamente dalle (7) mediante $X_1(\sigma)$, che per ipotesi non è zero; lo sviluppo così ottenuto è valido in un intorno della funzione σ.

11. Consideriamo, per fare una prima applicazione particolare, l'equazione della forma (6)

$$X' = \beta X ,$$

dove β è una funzione analitica regolare nell'intorno di $x = 0$. Le equazioni (7) danno allora

$$\lambda_1 = \beta\lambda_0 , \ \lambda_2 = \beta\lambda_1 , \ldots ,$$

onde

$$\lambda_n = \lambda_0 \beta^n ,$$

e lo sviluppo di X è

$$X(\varphi) = \lambda_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \beta^n \varphi^{(n)} . \tag{9}$$

Indichiamo con a il massimo valore assoluto di $\beta(x)$ entro il cerchio (r) di centro $x = 0$ e di raggio r; sia poi S l'intorno della costante costituito dalle serie di potenze convergenti in cerchi di centro $x = 0$ e di raggi superiori ad a. Essendo φ un elemento di S, ed $a + r'$ il suo raggio di convergenza, sarà per ogni x preso entro il minore dei due cerchi $(r), (r')$:

$$|x| + |\beta(x)| < a + r' ,$$

e quindi, entro quel cerchio, $X(\varphi) = \varphi(x + \beta(x))$. Il ramo della operazione X dato dalla serie (9) non è dunque altro che il risultato, moltiplicato per λ_0, della sostituzione di $x + \beta(x)$ al posto di x in ogni elemento di S.

Se, in particolare, β si riduce ad una costante a — p. es. positiva — il ramo X ora trovato non è altro che $\lambda_0 \varphi(x + a)$. Questo ramo non si applicherebbe a certe funzioni, ad esempio ad una funzione σ che non si potesse continuare fuori di un cerchio di centro $x = 0$ e di raggio $\leq a$. Per ottenere un ramo di operazione soddisfacente all'equazione $X' = aX$ e valido intorno a σ, basta procedere come nel § 10; si ottiene così un ramo X_1 definito da $X_1(\sigma) = 1$, ed il cui sviluppo, valido in un intorno di σ, sarà

$$X_1(\varphi) = \sum \frac{1}{n!} E^n \varphi ,$$

dove, come dianzi, la $E\varphi$ è la forma differenziale lineare di prim'ordine $\varphi' - \frac{\sigma'}{\sigma} \varphi$.

12. Un caso particolare dell' equazione (6), più interessante del precedente, si ottiene facendo $G = D - x$. L' equazione simbolica che ne nasce, cioè:

$$X' = (D - x)\, X\,, \tag{10}$$

è quella cui soddisfa la trasformazione di Laplace [1].

Relativamente a quest' equazione, le equazioni ricorrenti (7) prendono la forma:

$$\begin{cases} \lambda_1 = (D - x)\,\lambda_0 \\ \lambda_2 = (D - x)\,\lambda_1 + \lambda_0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_{n+1} = (D - x)\,\lambda_n + n\lambda_{n-1}\,. \end{cases}$$

L' integrazione di questo sistema si eseguisce senza difficoltà, e si trova

$$\lambda_n = \lambda_0^{(n)} - nx\lambda_0^{(n-1)} + (n_2)\, x^2\lambda_0^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n\, x^n\, \lambda_0\,; \tag{11}$$

questo risultato si ha immediatamente per i primi valori dell' indice, e si dimostra poi in generale, deducendosi dall' equazione ricorrente che se la (11) vale per l' indice n, varrà anche per l' indice successivo $n + 1$. Il ramo dell' operazione X, definita (univocamente) da $X(\mu) = \lambda_0$, è dunque dato in un intorno di μ, da

$$X(\mu\varphi) = \lambda_0\varphi + \tag{12}$$

$$+ (\lambda'_0 - x\lambda_0)\,\varphi' + \cdots + \frac{1}{n!}\,(\lambda_0^{(n)} - nx\lambda_0^{(n-1)} + \cdots (-1)^n\, x^n\lambda_0)\,\varphi^{(n)} + \cdots.$$

Si faccia in particolare $\lambda_0 = e^{ax}$; viene:

$$e^{-ax}\, X(\mu\varphi) = \varphi + (a - x)\,\varphi' + \cdots \frac{(a - x)^n}{n\,!}\,\varphi^{(n)} + \cdots,$$

che per le funzioni di un intorno di μ assai facile a determinarsi, non è altro che $\varphi(a)$.

Facendo $X(1) = \dfrac{1}{x}$, si ha un ramo dell' operazione in discorso dato da

$$X(\varphi) = \frac{1}{x}\,\varphi - \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\varphi' + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + \frac{x}{1\,.\,2}\right)\varphi'' - \cdots,$$

da cui risulta

$$X(x) = -\frac{1}{x^2}\,,\; X(x^2) = \frac{1\,.\,2}{x^3}\,, \ldots;$$

[1] Infatti, la (10) non è altro che l' equazione a) della citata Nota dell' Amaldi, cioè una delle equazioni di definizione della trasformazione di Laplace.

ed è questo il ramo della trasformazione di Laplace considerato al § 4 della citata Nota del dott. Amaldi.

Sarebbe interessante di vedere qaule è la condizione affinchè un ramo dell'operazione X definita dalla (10) soddisfi alla seconda equazione di definizione della trasformazione di Laplace: $XD = -xX$; ma non è qui il luogo di insistere su ciò.

13. Veniamo ora ad alcune applicazioni in cui la F dell'equazione (1) non si riduca all'ordine zero, e consideriamo per prima l'equazione, cui soddisfa la trasformazione di Eulero e la derivazione d'indice qualunque s:

$$DX' = sX . \tag{13}$$

L'equazione ricorrente (3) si riduce in questo caso a

$$DX_n = (s - n + 1) X_{n-1} ,$$

da cui, fatto $X(\mu) = \lambda_0$, $X_n(\mu) = \lambda_n$, viene

$$\lambda_n = s(s-1) \dots (s - n + 1) D^n \lambda_0 .$$

Si ha così, per il ramo della X determinato dalla condizione $X(\mu) = \lambda_0$, e per un intorno della funzione μ:

$$X(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n) D^{-n} \lambda_0 . \varphi^{(n)} .$$

Volendo aggiungere per un ramo dell'operazione definita da (13), la condizione di essere commutabile colla derivazione, si soddisferanno le condizioni perchè X sia derivata d'indice s. Ciò si può ottenere nel modo indicato al § 108 del *Mémoire* .

14. Il sig. Borel, nelle sue recenti ed interessanti ricerche sulle serie del Taylor [1], ha fatto uso di un'operazione distributiva che egli definisce per le potenze intere e positive di x, e quindi per l'intorno della costante, mediante le uguaglianze:

$$X(s) = 1 , \quad X(x^n) = \frac{x^n}{n!} .$$

Questa operazione gode manifestamente, per ogni serie di potenze φ intere e positive di x, della proprietà:

$$DX(x\varphi) = X(\varphi) ,$$

che si può anche scrivere

$$DX' + xDX = 0 , \tag{14}$$

poichè dalla definizione della derivazione funzionale si deduce

$$DX' = DX(x\varphi) - xDX(\varphi) - X(\varphi) .$$

[1] Acta Mathematica, T. XX, pag. 243.

Si può dunque assumere l'equazione simbolica (14) come definizione di un'operazione; l'operazione di Borel sarà quel ramo dell'operazione così definita, che è individuata dalla condizione $X(1) = 1$.

Ora l'equazione mista differenziale e alle differenze (3) si riduce, nel caso dell'equazione (14), e posto $X(\mu) = \lambda_0$, $X^{(n)}(\mu) = \lambda_n$, alla forma:

$$D\lambda_{n+1} = -(xD + n)\lambda_n - nx\lambda_{n-1},$$

ossia

$$\lambda'_{n+1} + n\lambda_n + x(\lambda'_n + n\lambda_{n-1}) = 0. \tag{15}$$

Questa si integra senza difficoltà; si ha infatti

$$\lambda_1 = D^{-1}\lambda_0 - x\lambda_0,$$

onde per sostituzione, ed applicazione dell'integrazione per parti [1]

$$\lambda_2 = D^{-2}\lambda_0 - 2xD^{-1}\lambda_0 + x^2\lambda_0,$$

e in generale, col solito passaggio da n ad $n+1$:

$$\lambda_n = D^{-n}\lambda_0 - nxD^{-(n-1)}\lambda_0 + (n_2)\, x^2 D^{-(n-2)}\lambda_0 - \cdots + (-1)^n x^n \lambda_0.$$

Talchè, definendo un'operazione mediante l'equazione simbolica (14), il ramo di questa operazione individuato da $X(\mu) = \lambda_0$ è determinato, nell'intorno della funzione μ, dallo sviluppo

$$X(\mu\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (D^{-n}\lambda_0 - nxD^{-(n-1)}\lambda_0 + (n_2)x^2 D^{-(n-2)}\lambda_0 \ldots + (-1)^n x^n \lambda_0) D^n \varphi. \tag{16}$$

La determinazione non è però univoca, essendovi nei coefficienti le costanti che vi si introducono linearmente colle quadrature eseguite su λ_0.

Si noti che, dalla (16), segue:

$$X(\mu) = \lambda_0,\ X(x\mu) = D^{-1}\lambda_0, \ldots X(x^n\mu) = D^{-n}\lambda_0.$$

Il ramo dell'operazione X determinato da $X(1) = 1$ e prendendo inoltre, nelle quadrature $D^{-1}s$, $D^{-2}s$, ... l'estremo inferiore in $x = 0$, coincide coll'operazione di Borel.

15. Per ultima, consideriamo l'operazione definita dall'equazione simbolica (non omogenea in X)

$$DX' = 1, \tag{17}$$

la quale, sebbene non rientri nel tipo (1), vi si avvicina però assai. Se poniamo anche qui

$$X(\mu) = \lambda_0,\ X^{(n)}(\mu) = \lambda_n$$

[1] Vale a dire, in generale, della formula (17) del § 89 del *Mémoire*.

e sviluppiamo $X(\mu\varphi)$ secondo la formula (2), viene che le $X^{(n)}(\mu)$ si determinano immediatamente dalla (17), che derivata funzionalmente dà:

$$X' + DX'' = 0\,, \ldots nX^{(n)} + DX^{(n+1)} = 0\,,$$

e quindi, poichè $DX'(\mu) = \mu$, onde $\lambda_1 = D^{-1}\mu$, viene

$$\lambda_2 = -D^{-2}\mu\,,\ \lambda_3 = 2D^{-3}\mu\,, \ldots \lambda_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\,D^{-n}\mu\,.$$

Si ha così lo sviluppo

$$(18)\quad X(\mu\varphi) = \lambda_0\varphi + D^{-1}\mu\,.\,\varphi' - \frac{1}{2}D^{-2}\mu\,.\,\varphi'' + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}D^{-n}\mu.\varphi^{(n)} + \cdots$$

Qui la funzione λ_0 è affatto arbitaria, e sono pure arbitrarie le costanti che nascono dalla determinazione delle quadrature applicate a μ. Da notarsi il ramo dell'operazione X determinato da $X(1) = 0$, cioè

$$(19)\quad X(\varphi) = D^{-1}1\,.\,\varphi' - \frac{1}{2}D^{-2}1\,.\,\varphi'' + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}D^{-n}1\,.\,\varphi^{(n)} + \cdots\,.$$

Se applichiamo questa operazione alla funzione $\frac{1}{1-x}$, ed assumiamo per le quadrature l'estremo inferiore $x = 0$, si ottiene, con un calcolo facile,

$$(20)\qquad X\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{1}{1-x}\log(1-x)\,.$$

Colle medesime determinazioni, si trova

$$X(x^m) = \left(m - \frac{1}{2}(m_2) + \frac{1}{3}(m_3) - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{m}\right)x^m\,,$$

e dal confronto colla (20), si ha la formula di calcolo combinatorio

$$m - \frac{1}{2}(m_2) + \frac{1}{3}(m_3) - \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\,.$$

Si noti che l'operazione definita in quest'ultimo paragrafo ammette un ramo commutabile colla derivazione, e che soddisfa all'equazione simbolica $e^x = D$, per cui esso potrebbe indicarsi simbolicamente con $\log D$. Questo ramo dà l'operazione infinitesima generatrice del gruppo ad un parametro delle operazioni D^s.