ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Matematica. — *Contributo alla geometria delle masse.* Nota dell'ing. A. Ciappi, presentata dal Socio V. Cerruti.

I.

1. Consideriamo un sistema di masse $m_1\, m_2 \dots m_n$ di segno qualunque distribuite in un piano π e occupanti su esso rispettivamente il posto dei punti $P_1\, P_2 \dots P_n$. Supponiamo per ora $\Sigma m \neq 0$.

Essendo a e b due rette arbitrarie di π indichiamo con $y_1\, y_2 \dots y_n$ le distanze dei punti $P_1\, P_2 \dots P_n$ dalla retta a valutate ortogonalmente o secondo una direzione arbitraria, per es. quella di b; e indichiamo con $x_1\, x_2 \dots x_n$ le distanze degli stessi punti dalla retta b valutate pure ortogonalmente o secondo una direzione arbitraria, per es. quella di a.

2. S'intende per *momento statico* del dato sistema di masse rispetto alla retta b, la somma

$$\Sigma mx$$

estesa a tutte le masse del sistema; e per *momento di 2° grado* rispetto alle due rette a e b, la somma

$$\Sigma mxy$$

essa pure estesa a tutte le masse del sistema.

Tanto il momento statico quanto il momento di 2° grado si dicono *normali* se le distanze sono valutate ortogonalmente, e si dicono *obliqui* se esse sono valutate obliquamente.

Per fissare le idee noi supporremo che dette distanze sieno valutate secondo le direzioni di a e di b.

3. Dei punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali alle masse m, troviamo il baricentro O e diciamo $X_0\, Y_0$ le sue distanze da b e da a. Poscia determiniamo separatamente i momenti statici di tutte le masse m rispetto alla retta b, e ritenendo i punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali a questi momenti statici, troviamo il loro baricentro B che chiamasi *centro di 2° grado* o *centro relativo* alla retta b, perchè esso è unico, resta invariato qualunque sia la direzione assunta per computare le distanze x e dipende esclusivamente dalla posizione della retta b. Indichiamo con Y_b la distanza di B dalla retta a.

In modo analogo troviamo il centro A relativo alla retta a e chiamiamo X_a la sua distanza dalla retta b.

4. Per un noto teorema sui momenti statici, si ha allora

$$\Sigma mxy = Y_b . \Sigma mx = Y_b . X_0 . \Sigma m \tag{1}$$

e così pure

$$\Sigma mxy = X_a . \Sigma my = X_a . Y_0 . \Sigma m \tag{2}$$

conseguentemente

$$Y_b . X_0 = X_a . Y_0 \tag{3}$$

5. Supponiamo ora che nessuna delle due rette a e b passi pel baricentro O del sistema, cioè che sieno X_0 e Y_0 diversi da zero, mentre la retta a passi per B, cioè sia $Y_b = 0$; dalla (3) risulta allora

$$X_a = 0$$

e quindi il centro A relativo ad a sta sopra b.

Le due rette o assi a e b diconsi allora *coniugati* e rispetto ad essi è evidentemente

$$\Sigma mxy = 0 .$$

Pertanto tutte le rette passanti per B hanno i centri relativi situati su b e così tutti i punti di una retta a hanno per assi relativi rette che inviluppano il punto A.

6. Onde è che il dato sistema di masse genera una corrispondenza reciproca tra i punti e le rette del piano π, ossia un sistema polare, la cui conica fondamentale, anche se imaginaria, ha per centro un punto reale e reali le coppie di diametri coniugati; e gode sempre della proprietà che rispetto ad essa un asse e il centro relativo sono polare e polo.

7. Ciò premesso prendiamo in esame due assi a e b *non coniugati*, ma di cui il primo passi per O.

Poichè $Y_0 = 0$ ed evidentemente $X_a = \infty$, risulta dalla (2)

$$\Sigma mxy = \infty . 0 . \Sigma m$$

vale a dire il momento di 2° grado si presenta sotto forma indeterminata; ma dalla (1) si ha

$$\Sigma mxy = Y_b . X_0 . \Sigma m$$

e così l'indeterminatezza è tolta.

8. Considerando però due assi a e b *non coniugati* entrambi passanti per O, allora mentre è $\Sigma mxy \neq 0$, sono $X_0 = Y_0 = 0$ e $Y_b = \infty$, $X_a = \infty$, quindi tanto dalla (1) quanto dalla (2) si ha

$$\Sigma mxy = \infty . 0 . \Sigma m .$$

In tal caso non si saprebbe togliere l'indeterminatezza senza ricorrere al teorema seguente:

Il momento di 2° grado di un sistema di masse distribuite in un piano, rispetto a due assi non coniugati di cui uno passi pel baricentro del sistema e l'altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso, è costante.

Infatti, sia O il baricentro del sistema (centro della conica fondamentale); dei due assi non coniugati a e b, incontrantisi in M′, l'asse a passi per O, e sia B il centro relativo a b. Condotta da B la parallela a b fino ad incontrare in M l'asse a, risulta $\overline{\mathrm{BM}} = \mathrm{Y}_b$, e poichè $\overline{\mathrm{OM}'} = \mathrm{X}_0$, si ha per la (1)

$$\Sigma mxy = \overline{\mathrm{BM}} \,.\, \overline{\mathrm{OM}'} \,.\, \Sigma m \,. \tag{4}$$

Inoltre tracciata la retta BO, di cui diremo B′ il punto d'incontro con b, abbiamo in BO il diametro della conica fondamentale coniugato alla direzione di b, ossia abbiamo il luogo del centro relativo all'asse b quando b si sposta parallelamente a sè stesso.

Ora collo spostarsi di b parallelamente a se stesso, si ha sul diametro OB oltre alla punteggiata B...... l'altra punteggiata B′...... accoppiata colla prima in involuzione; e contemporaneamente sull'asse a restano individuate due altre punteggiate M...... e M′...... pure accoppiate in involuzione con lo stesso centro in O. Pertanto risulta

$$\overline{\mathrm{OM}} \,.\, \overline{\mathrm{OM}'} = \text{costante} \tag{5}$$

e poichè dal triangolo OBM si ha

$$\frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{BM}}} = \text{costante} = \mu$$

da cui

$$\overline{\mathrm{OM}} = \mu \,.\, \overline{\mathrm{BM}}$$

sostituendo nella (5) si ottiene

$$\overline{\mathrm{BM}} \,.\, \overline{\mathrm{OM}'} = \text{costante}$$

e perciò dalla (4)

$$\Sigma mxy = \text{costante}$$

come volevasi dimostrare.

In conseguenza di ciò per trovare il momento di 2° grado rispetto a due assi a e b *non coniugati* ed entrambi *passanti* per O, basta condurre un terzo asse b_1 parallelo a b, rilevare la sua distanza X_0 da O, trovare il suo centro relativo B_1 e la distanza Y_{b_1} di questo da a e infine calcolare il prodotto $\mathrm{X}_0 \,.\, \mathrm{Y}_{b_1} \,.\, \Sigma m$.

II.

9. Passiamo ora a considerare il caso di $\Sigma m = 0$, cioè il caso in cui il dato sistema di masse $m_1\ m_2 \ldots m_n$, che diremo S, possa immaginarsi costituito da due sistemi S_1 e S_2 tali che la somma delle masse di S_1, che indicheremo con $\Sigma m'$, sia uguale e di segno contrario alla somma delle masse di S_2, che indicheremo con $\Sigma m''$.

Cercati separatamente i baricentri O_1 e O_2 dei due sistemi S_1 e S_2, può darsi:

1° che O_1 sia distinto da O_2

2° che O_1 sia sovrapposto ad O_2.

Nel primo caso il sistema S ha per baricentro il punto all' infinito della congiungente $O_1 O_2$; il suo momento statico rispetto a tutte le rette di un fascio qualunque di raggi paralleli è costante; la conica direttrice della polarità è una parabola, e il teorema sussiste ancora e può dimostrarsi anche direttamente in maniera assai semplice.

Nel secondo caso il sistema S è privo di baricentro; il suo momento statico rispetto ad un' asse qualunque del piano è nullo; la conica inviluppo fondamentale della polarità degenera in una coppia di punti appartenenti alla retta all' infinito del piano, e il teorema non solo sussiste ancora, ma diviene più generale.

Sia infatti O la posizione comune ai due baricentri O_1 e O_2. Considerando un asse qualunque a troviamone i centri relativi A' e A'' nei due sistemi di masse S_1 e S_2. Il centro relativo ad a nel sistema S sarà evidentemente il baricentro dei due punti A' e A'' affetti da coefficienti uguali o proporzionali ai momenti statici di S_1 e S_2 rispetto ad a; ma poichè tali momenti statici sono uguali e di senso contrario, segue che il detto centro è il punto all' infinito della congiungente $A'A''$ e pertanto è $A'A''$ la direzione coniugata ad a. Conseguentemente il centro relativo ad un' asse qualunque del piano sta sulla retta all' infinito di questo, e tale retta all' infinito può considerarsi come asse relativo ad un punto qualsivoglia del piano.

Tracciamo un altro asse qualunque b non coniugato ad a. Uniamo A' e A'' fra di loro e con O e diciamo M' e M'' le intersezioni di OA' e OA'' con a; tiriamo per A' e A'' le parallele ad a fino ad incontrare in C e D l'asse b; e infine conduciamo per O e A'' le parallele a b fino ad incontrare a in M e $A'C$ in A.

Il momento di 2° grado del sistema S rispetto ai due assi a e b è espresso allora da

$$\Sigma mxy = \overline{OM} \,.\, \Sigma m' \,.\, \overline{A'C} - \overline{OM} \,.\, \Sigma m'' \,.\, \overline{A''D} = \overline{OM} \,.\, \overline{A'A} \,.\, \Sigma m' \,. \tag{6}$$

Ora restando fisso a, comunque si sposti b, purchè parallelamente a sè stesso, la distanza $\overline{A'A}$ rimane invariata come la $\overline{OM}$, e perciò

$$\Sigma mxy = \text{costante}$$

onde:

se un sistema di masse distribuite in un piano è privo di baricentro, il suo momento di 2° grado rispetto a due assi qualsivogliano non coniugati di cui uno resti fisso e l'altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso, è costante.

10. Ma vi ha di più. Si rileva per cose note, essere

$$\overline{\mathrm{OM}'}\,.\,\overline{\mathrm{OA}'} = \text{costante} = c_1 \tag{7}$$

e inoltre, osservando che con lo spostarsi di a parallelamente a sè stesso i suoi centri relativi A′ e A″ si spostano sulle congiungenti OA′ e OA″ conservandosi allineati col punto all' infinito della A′A″, si vede facilmente che il punto A scorre sulla congiungente OA e che quindi

$$\frac{\overline{\mathrm{A'A}}}{\overline{\mathrm{OA}'}} = \text{costante} = c_2$$

da cui

$$\overline{\mathrm{A'A}} = c_2 \cdot \overline{\mathrm{OA}'}$$

e ancora, dal triangolo MOM′,

$$\frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OM}'}} = \text{costante} = c_3$$

da cui

$$\overline{\mathrm{OM}} = c_3\,.\,\overline{\mathrm{OM}'}$$

onde sostituendo nella (6)

$$\Sigma mxy = c_3\,.\,\overline{\mathrm{OM}'}\,.\,c_2\,.\,\overline{\mathrm{OA}'}\,.\,\Sigma m'$$

e pertanto dalla (7)

$$\Sigma mxy = c_1\,.\,c_2\,.\,c_3\,.\,\Sigma m' = \text{costante}\,.$$

Di qui il teorema più generale:
quando il sistema S *è privo di baricentro, il suo momento di 2° grado rispetto a due assi qualsivogliano non coniugati è costante comunque entrambi si spostino, purchè parallelamente a sè stessi.*

11. Se $a \equiv b$, il momento di 2° grado diviene *momento d' inerzia*, e il teorema precedente dà luogo alla notevole proposizione:
se un sistema di masse distribuite in un piano è privo di baricentro, il suo momento d' inerzia rispetto ad ogni retta di un fascio qualunque di rette parallele è costante (1).

III.

12. Tutte le proprietà precedentemente dimostrate possono estendersi con abbastanza facilità ad un sistema di masse $m_1\ m_2\ \ldots.\ m_n$ che occupino rispettivamente la posizione dei punti $\mathrm{P}_1\ \mathrm{P}_2\ \ldots.\ \mathrm{P}_n$ comunque situati nello spazio.

(1) In particolare, il momento d' inerzia è nullo rispetto a tutte le rette che hanno o l'una o l'altra delle due direzioni individuate dalle tangenti comuni alle coniche fondamentali delle polarità generate dai due sistemi S_1 e S_2.

Indicheremo ancora con S il dato sistema di masse e supporremo in primo luogo $\Sigma m \neq 0$.

Consideriamo due piani qualsiansi α e β e chiamiamo con $y_1\ y_2 \ldots\ y_n$ le distanze dei punti $P_1\ P_2 \ldots P_n$ da α computate normalmente o secondo una direzione arbitraria; e così indichiamo con $x_1\ x_2 \ldots x_n$ le distanze analoghe da β computate normalmente o secondo una direzione arbitraria.

13. S' intende per *momento statico* del sistema S rispetto al piano α la somma

$$\Sigma my$$

estesa a tutte le masse del sistema; e per *momento di 2° grado* di S rispetto ai due piani α e β la somma

$$\Sigma mxy$$

estesa a tutte le masse di S.

Anche in tal caso si distinguono i momenti in *normali* ed *obliqui*, a seconda che le distanze sieno computate normalmente od obliquamente.

Per fissare le idee noi valuteremo le distanze x e y parallelamente alle intersezioni dei piani α e β con un terzo piano arbitrario che diremo γ.

14. Dei punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali alle rispettive masse m, troviamo il baricentro O, centro del sistema S, e diciamone $X_0\ Y_0$ le distanze da β e da α.

Determinati poi i singoli momenti statici delle masse m rispetto al piano β, riteniamo i punti P affetti da coefficienti uguali o proporzionali a tali momenti statici e troviamone il baricentro B che dicesi *centro di 2° grado* o *centro relativo* al piano β, perchè è unico e non dipende che dalla posizione del piano β. Diciamo Y_β la sua distanza da α.

Analogamento determinati i momenti statici delle masse m rispetto al piano α, troviamo il centro A relativo ad α e diciamone X_α la distanza da β.

15. Per essere

$$\Sigma mxy = Y_\beta \,.\, X_0 \,.\, \Sigma m = X_\alpha \,.\, Y_0 \,.\, \Sigma m \tag{8}$$

e quindi

$$Y_\beta \,.\, X_0 = X_\alpha \,.\, Y_0$$

risulta che se B sta su α, A si trova su β: tali piani si dicono allora *coniugati* e rispetto ad essi il momento di 2° grado è evidentemente nullo.

Di più segue che tutti i piani passanti per B hanno i centri relativi situati su α, e pertanto il centro relativo ad un piano è l' inviluppo di tutti i suoi piani coniugati.

16. Il sistema S individua quindi una corrispondenza reciproca tra i punti e i piani dello spazio, ossia un sistema polare la cui quadrica fondamentale, reale o imaginaria, ha sempre il centro reale coincidente con O e reali le coppie di piani e diametri coniugati. Rispetto a tale quadrica è

evidente che un piano ed il suo centro relativo si comportano come piano polare e polo; e quindi la congiungente AO è il diametro della quadrica coniugato ai piani paralleli ad α, cioè è il luogo dei centri relativi a tutti i piani paralleli ad α.

17. Ciò premesso consideriamo due piani arbitrarî α e β non coniugati di cui α passi per O.

Essendo B il centro relativo a β uniamo B con O e per questa congiungente conduciamo il piano che contiene la direzione coniugata ad α. Assumeremo questo piano come piano γ.

Chiamando allora B′ la traccia di BO su β e B″ il punto in cui il piano γ incontra la retta $\overline{\alpha\beta}$, saranno B′B″ e B″O le intersezioni di γ coi piani β e α. Condotta da B la parallela a B′B″, diciamo B‴ il punto ove essa incontra la B″O. Il momento di 2° grado del sistema S rispetto ai due piani α e β, è espresso allora, per la prima della (8), da

$$\Sigma mxy = \overline{BB'''}\,.\,\overline{OB''}\,.\,\Sigma m \tag{9}$$

Ora, comunque si sposti il piano β, purchè parallelamente a sè stesso, i punti B . . . . e B′ . . . . della congiungente BO descrivono due punteggiate in involuzione di cui O è il centro; e così sulla B″O vengono generate le punteggiate B‴. . . . e B″. . . . pure in involuzione con centro in O; onde risulta

$$\overline{OB'''}\,.\,\overline{OB''} = \text{costante} = c_1 \tag{10}$$

ma del triangolo OB‴B si ha

$$\frac{\overline{OB'''}}{\overline{BB'''}} = \text{costante} = c_2$$

da cui

$$\overline{OB'''} = c_2\,.\,\overline{BB'''}$$

quindi dalla (10)

$$\overline{BB'''}\,.\,\overline{OB''} = \text{costante} = c_3$$

e dalla (9)

$$\Sigma mxy = c_3\,.\,\Sigma m = \text{costante}$$

onde il teorema:

è costante il momento di 2° grado di un sistema di masse, comunque distribuite nello spazio, rispetto a due piani non coniugati di cui uno passi pel baricentro del sistema e l'altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso.

IV.

18. Passiamo ora a considerare il caso che sia $\Sigma m = 0$, e indichiamo con S_1 e S_2 i due sistemi parziali che costituiscono il sistema S.

Se il baricentro O_1 del sistema S_1 ($\Sigma m'$) è diverso da quello O_2 del sistema S_2 ($\Sigma m''$), il baricentro del sistema complessivo S è a distanza infinita sulla congiungente $O_1 O_2$; il momento statico di S rispetto ad ogni piano di un fascio qualunque di piani parelleli è costante; la quadrica fondamentale della polarità è un paraboloide ad una falda, e il precedente teorema risulta evidente.

Se poi $O_1 \equiv O_2$ il sistema S è privo di baricentro; il suo momento statico rispetto ad un piano qualunque dello spazio è nullo; la quadrica inviluppo fondamentale della polarità degenera in una conica situata sul piano all' infinito dello spazio, ossia il centro relativo ad un piano generico α è il punto all' infinito della congiungente $A'A''$ essendo A' e A'' i centri relativi ad α rispettivamente nei due sistemi S_1 e S_2, e un punto qualunque dello spazio può esser considerato come centro di 2° grado del piano all' infinito.

Considerando un altro piano generico β non coniugato ad α, e assunto il piano $OA'A''$ come piane γ, uniamo A' e A'' con O e diciamo M' e M'' le tracce di queste congiungenti sul piano α, talchè sia $M'M''$ l' intersezione $\overline{\alpha\gamma}$; inoltre per A' e A'' sul piano γ conduciamo le parallele ad $M'M''$ e diciamo C e D le loro tracce su β, talchè sia CD l' intersezione $\overline{\gamma\beta}$; e infine sempre su γ tiriamo per A'' e O le parallele a CD fino ad incontrare rispettivamente $A'C$ in A e $M'M''$ in M.

Il momento di 2° grado del sistema S rispetto ai due piani α e β è espresso da

$$(11) \qquad \Sigma mxy = \overline{OM} \,.\, \Sigma m' \,.\, \overline{A'C} - \overline{OM} \,.\, \Sigma m'' \,.\, \overline{A''D} = \overline{OM} \,.\, \overline{A'A} \,.\, \Sigma m'.$$

Ora se α rimane fisso e β si sposta parallelamente a sè stesso, non solo il segmento $\overline{OM}$ resta invariato, ma anche la distanza $\overline{A'A}$; perciò

$$\Sigma mxy = \text{costante}$$

e quindi:

in un sistema di masse privo di baricentro, è costante il momento di 2° grado rispetto a due piani qualsivogliano non coniugati, di cui uno resti fisso e l' altro si sposti comunque purchè parallelamente a sè stesso.

19. Inoltre, se si tiene fisso β e si fa spostare parallelamente a sè stesso il piano α, risulta

$$\overline{OM} \,.\, \overline{A'A} = \text{costante},$$

onde, più in generale:

il momento di 2° grado di un sistema di masse privo di baricentro è costante rispetto a due piani qualsivogliano α e β non coniugati, comunque questi si spostino purchè parallelamente a sè stessi.

20. Se $\alpha \equiv \beta$ il momento di 2° grado diviene momento d' inerzia e pertanto si ha la proposizione seguente:

il momento d' inerzia di un sistema di masse privo di baricentro è costante rispetto ad ogni piano di un fascio qualunque di piani paralleli [1].

[1] In particolare il momento d' inerzia è nullo rispetto a tutti i piani che hanno una qualunque delle infinite giaciture individuate dai piani tangenti comuni alle due quadriche fondamentali delle polarità generate dai due sistemi S_1 e S_2.