# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Ripetendo l'esperienza con dischi di egual natura, ma portando uno di essi ad un potenziale più elevato dell'altro che resta unito con l'elettrometro, (mediante uno shunt fatto sul circuito di una pila), si ottengono le stesse deviazioni dell'ago dell'elettrometro, se la differenza di potenziale dei due dischi è di 0,8 — 0,9 volt. Questo valore rappresenta dunque la forza elettromotrice di contatto della coppia zinco-oro adoperata.

**Fisica**. — *Verifica del principio dell'equivalenza termodinamica per un conduttore bimetallico.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio BLASERNA.

In due Note precedenti [1] ho dedotte le espressioni delle temperature stazionaria e variabile di un conduttore lineare composto di due metalli, le cui estremità sono mantenute costantemente alla temperatura assunta come zero. Ora farò uso dell'espressione della temperatura stazionaria per dedurre un metodo di verifica del principio dell'equivalenza. Mi pare che questa ricerca possa presentare qualche interesse, non solo perchè è desiderabile che un principio esperimentale, quale è quello dell'equivalenza, venga verificato per tutte le forme di trasformazione di energia in calore, ma anche perchè dimostra che i fenomeni termoelettrici procedono con tale regolarità da poter venire studiati esperimentalmente sulla base dei risultati analitici.

Ricordiamo che nel caso speciale in cui le variazioni delle temperature che intervengono nel conduttore si limitino a pochi gradi, noi potremo assumere come costanti i coefficienti di conducibilità interna ed esterna e di resistenza elettrica relativi ai due metalli, che come precedentemente indicheremo con $k_1, h_1, \omega_1$ e $k_2, h_2, \omega_2$; e che inoltre noi potremo trascurare l'effetto Thomson. Poniamo nell'asse del conduttore composto dei due fili di lunghezza $l_1$ ed $l_2$ l'asse delle ascisse $x_1$ e $x_2$, ed assumiamo come origine delle $x_1$ l'estremità del primo filo e come origine delle $x_2$ il punto di contatto dei due fili. Allora le temperature stazionarie $U_1$ ed $U_2$ saranno date dalle formule:

$$U_1 = C_1 + A_1 e^{\lambda_1 x_1} + B_1 e^{-\lambda_1 x_1}, \quad U_2 = C_2 + A_2 e^{\lambda_2 x_2} + B_2 e^{-\lambda_2 x_2};$$

ove si pose:

$$C_1 = i^2 \frac{\omega_1}{J q h_1 p}, \quad C_2 = i^2 \frac{\omega_2}{J q h_2 p}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{h_1 p}{k_1 q}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{h_2 p}{k_2 q}},$$

indicando con $i$ l'intensità della corrente che attraversa il conduttore, con $p$ e $q$ il perimetro e la sezione uguale per i due fili, con P il coefficiente del-

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. VII, 1° sem., pag. 346; 2° sem, pag. 206.

l' effetto Peltier fra i due metalli alla temperatura media in cui si esperimenta e finalmente con J l' equivalente meccanico della caloria. Le costanti $A_1, B_1, A_2, B_2$ saranno poi le radici del seguente sistema di equazioni di primo grado:

$$C_1 + A_1 + B_1 = 0$$

$$C_2 + A_2 e^{\lambda_2 l_2} + B_2 e^{-\lambda_2 l_2} = 0$$

$$C_1 + A_1 e^{\lambda_1 l_1} + B_1 e^{-\lambda_1 l_1} = C_2 + A_2 + B_2$$

$$\lambda_1 k_1 (A_1 e^{\lambda_1 l_1} - B_1 e^{-\lambda_1 l_1}) - \lambda_2 k_2 (A_2 + B_2) = P \frac{i}{q}.$$

La quantità di calore $Q'$ che il conduttore considerato perde nell' unità di tempo per conducibilità interna dalle estremità mantenute alla temperatura zero è evidentemente:

$$Q' = q \left\{ k_1 \left( \frac{dU_1}{dx_1} \right)_0 + k_2 \left( \frac{dU_2}{dx_2} \right)_{l_2} \right\}.$$

La quantità di calore $Q''$ che esso perde per conducibilità esterna dalla superficie circondata dall' aria è:

$$Q'' = p \left\{ h_1 \int_0^{l_1} U_1 \, dx_1 + h_2 \int_0^{l_2} U_2 \, dx_2 \right\}.$$

Sostituendo per $U_1$ ed $U_2$ i loro valori, eseguendo le derivazioni e le integrazioni e sommando le quantità $Q'$ e $Q''$ si avrà la quantità totale di calore Q che il conduttore perde nell' unità di tempo.

$$\begin{aligned} Q = Q' + Q'' = q &\left\{ \lambda_1 k_1 (A_1 - B_1) + \lambda_2 k_2 (A_2 e^{\lambda_2 l_2} - B_2 e^{-\lambda_2 l_2}) \right\} \\ &+ p \left\{ h_1 \left[ C_1 l_1 + \frac{A_1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 l_1} - 1) - \frac{B_1}{\lambda_1} (e^{-\lambda_1 l_1} - 1) \right] \right. \\ &\left. + h_2 \left[ C_2 l_2 + \frac{A_2}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 l_2} - 1) - \frac{B_2}{\lambda_2} (e^{-\lambda_2 l_2} - 1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Trovandosi il conduttore in uno stato termico stazionario per il principio dell' equivalenza, l' energia calorifica da esso emessa dovrà essere eguale all' energia elettrica da esso dissipata. La prima è misurata dal prodotto JQ, la seconda dal prodotto dell' intensità della corrente nella differenza di potenziale alle estremità del conduttore; indicando questo prodotto con $i\Delta p$ si avrà:

$$i\Delta p = JQ.$$

Questa è l' equazione che si tratta di verificare esperimentalmente. Essa contiene i valori di $p, q, i, l_1$ ed $l_2$ che sono direttamente misurabili e dei coefficienti $k_1, k_2, h_1, h_2, P, \omega_1$ ed $\omega_2$. Questi ultimi si devono determinare esperimentalmente con metodi specialmente convenienti al caso particolare che ci occupa.

*Determinazione dei coefficienti* $k_1$, $k_2$, $h_1$ *ed* $h_2$. I movimenti di calore prodotti dagli effetti della corrente elettrica differiscono assai da quelli che si studiano nella teoria ordinaria del calore. Infatti, mentre generalmente i flussi calorifici si considerano provocati da variazioni delle temperature alle superficie dei corpi, nel nostro conduttore invece dobbiamo distinguere due differenti svolgimenti di calore, di cui il primo avviene in ogni punto del conduttore, è sempre positivo e non varia quando si inverta la corrente; mentre il secondo avviene nella superficie di contatto dei due fili e cambia il segno colla direzione della corrente. Noi non possiamo quindi *a priori* affermare che per la determinazione dei coefficienti di conducibilità termica possiamo far uso dei metodi e delle formole ordinarî, ma dovremo in ogni singolo caso considerare rigorosamente le speciali condizioni del nostro problema.

Invertendo periodicamente la corrente nel conduttore, la temperatura tenderà a divenire per ogni punto di esso una funzione periodica del tempo. Vediamo ora se la conoscenza di questa funzione per diversi punti del conduttore ci può condurre alla deduzione dei coefficienti voluti. Indichiamo con $u_1'$ ed $u_2'$ le temperature che si avrebbero nelle due parti del conduttore nel caso ideale in cui l'effetto Peltier fosse nullo; con $u_1''$ ed $u_2''$ quelle che si avrebbero se la resistenza fosse nulla. Le temperature reali $u_1$ ed $u_2$ saranno rispettivamente:

$$u_1 = u_1' + u_1'' \quad , \quad u_2 = u_2' + u_2'' .$$

Siccome invertendo la corrente solo la $u_1''$ e la $u_2''$ mutano segno, potremo indicare gli stati stazionarî cui tendono le temperature $u_1$ ed $u_2$ per le due differenti direzioni della corrente con:

$$\overset{+}{\mathrm{U}}_1 = \mathrm{U}_1' + \mathrm{U}_1'' \,, \qquad \overset{+}{\mathrm{U}}_2 = \mathrm{U}_2' + \mathrm{U}_2'' \,,$$

$$\overset{-}{\mathrm{U}}_1 = \mathrm{U}_1' - \mathrm{U}_1'' \,, \qquad \overset{-}{\mathrm{U}}_2 = \mathrm{U}_2' - \mathrm{U}_2'' \,;$$

da cui si deduce:

$$\mathrm{U}_1' = \frac{\overset{+}{\mathrm{U}}_1 + \overset{-}{\mathrm{U}}_1}{2} \quad , \quad \mathrm{U}_2' = \frac{\overset{+}{\mathrm{U}}_2 + \overset{-}{\mathrm{U}}_2}{2} .$$

Le funzioni $\mathrm{U}_1'$ ed $\mathrm{U}_2'$ si possono quindi determinare esperimentalmente dall'osservazione delle $\overset{+}{\mathrm{U}}_1$, $\overset{+}{\mathrm{U}}_2$, $\overset{-}{\mathrm{U}}_1$ ed $\overset{-}{\mathrm{U}}_2$.

Per la loro definizione le $\mathrm{U}_1$ ed $\mathrm{U}_2'$ devono soddisfare le equazioni differenziali:

$$(1) \qquad \frac{d^2\mathrm{U}_1'}{dx_1^2} - \frac{h_1 p}{k_1 q}\mathrm{U}_1' + \frac{i^2\omega_1}{q^2 k_1 \mathrm{J}} = 0 \,, \quad \frac{d^2\mathrm{U}_2'}{dx_2^2} - \frac{h_2 p}{k_2 q}\mathrm{U}_2' + \frac{i^2\omega_2}{q^2 k_2 \mathrm{J}} = 0 \,;$$

le cui condizioni, assumendo provvisoriamente l'origine tanto delle $x_1$ quanto delle $x_2$, nel punto di contatto dei due fili, prenderanno la forma:

$$(1')\qquad \begin{aligned} (\mathrm{U}'_1)_{x_1=l_1} &= (\mathrm{U}'_2)_{x_2=l_2} = 0 \\ (\mathrm{U}'_1)_{x_1=0} &= (\mathrm{U}'_2)_{x_2=0} = \frac{\overset{+}{\mathrm{U}}_c + \overset{-}{\mathrm{U}}_c}{2}, \end{aligned}$$

indicando con $\overset{+}{\mathrm{U}}_c$ ed $\overset{-}{\mathrm{U}}_c$ le temperature reali stazionarie al contatto dei due fili per le differenti direzioni della corrente.

Ora supponiamo che per un lungo spazio di tempo si sia periodicamente invertita la corrente. La temperatura al contatto dei due fili sarà divenuta con grande approssimazione una funzione periodica oscillante intorno alla temperatura che in esso si avrebbe se l'effetto Peltier fosse nullo, cioè intorno alla temperatura $\dfrac{\overset{+}{\mathrm{U}}_c + \overset{-}{\mathrm{U}}_c}{2}$. In ogni altro punto si avrà una funzione periodica dello stesso periodo T oscillante intorno al valore che assume in quel punto la funzione $\mathrm{U}'_1$, o rispettivamente la $\mathrm{U}'_2$.

Le equazioni delle temperature $u_1$ ed $u_2$ sarebbero allora:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{k_1}{c_1\varrho_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{h_1 p}{q\varrho_1 c_1} u_1 + \frac{i^2\omega_1}{c_1\varrho_1 q^2 \mathrm{J}}; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{k_2}{c_2\varrho_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{h_2 p}{q\varrho_2 c_2} u_2 + \frac{i^2\omega_2}{c_2\varrho_2 q^2 \mathrm{J}}. \end{aligned}$$

Per determinare le costanti di integrazione avremo le condizioni:

$$(2')\qquad \begin{aligned} &(u_1)_{x_1=l_1} = (u_2)_{x_2=l_2} = 0, \text{ per ogni } t; \\ &(u_1)_{x_1=0} = (u_2)_{x_2=0} = \frac{\overset{+}{\mathrm{U}}_c + \overset{-}{\mathrm{U}}_c}{2} + \varrho_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}} t + \alpha_n\right), \text{ per ogni } t; \end{aligned}$$

ed inoltre la condizione che per ogni $x_1$, od $x_2$ le $u_1$ ed $u_2$ siano funzioni periodiche del tempo, aventi il periodo T.

Le parti delle $u_1$ ed $u_2$, che non variano quando si inverte la corrente, devono avere raggiunto il loro stato stazionario prima che le $u_1$ ed $u_2$ siano divenute periodiche. Poniamo quindi:

$$u_1 = \mathrm{U}'_1 + u''_1, \quad u_2 = \mathrm{U}'_2 + u''_2.$$

Ciascuna delle equazioni (2) si potrà così scindere in due parti, di cui le prime non saranno altro che le equazioni (1) e le seconde saranno:

$$(3)\qquad \frac{\partial u''_1}{\partial t} = \frac{k_1}{c_1\varrho_1}\frac{\partial^2 u''_1}{\partial x_1^2} - \frac{h_1 p}{q\varrho_1 c_1} u''_1; \quad \frac{\partial u''_2}{\partial t} = \frac{k_2}{c_2\varrho_2}\frac{\partial^2 u''_2}{\partial x_2^2} - \frac{h_2 p}{q\varrho_2 c_2} u''_2.$$

Stabilendo inoltre che le condizioni in cui devono soddisfare le prime siano le (1′), avremo per le (3) le seguenti condizioni:

$$(u_1'')_{x_1=l_1} = (u_2'')_{x_2=l_2} = 0\,,\ \text{per ogni tempo.}$$

(3′) $$(u_1'')_{x_1=0} = (u_2'')_{x_2=0} = \varrho_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \varrho_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \alpha_n\right),\ \text{per ogni tempo.}$$

Per la completa determinazione degli integrali delle (3) dobbiamo ancora aggiungere che le $u_1''$ ed $u_2''$ debbono essere funzioni periodiche, aventi il periodo T per ogni $x_1$ ed $x_2$.

Le parti della temperatura variabili col tempo soddisfano quindi equazioni e condizioni che rientrano completamente nei tipi ordinarî, che si incontrano nella teoria del flusso lineare del calore. Noi possiamo quindi proporci di determinare i coefficienti voluti dalla propagazione della variazione periodica della temperatura al contatto dei due fili, prescindendo dalla considerazione della corrente elettrica e dei suoi effetti termici.

Siccome ora le due equazioni e le condizioni relative alle due parti del conduttore non differiscono che per gli indici *uno* e *due*, noi possiamo limitarci a considerarne una di esse, omettendo gli indici. Dovremo quindi integrare l'equazione:

(4) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{hp}{q\varrho c}\,u$$

colle condizioni:

(4′) $$(u)_{x=l} = 0\,,\ \text{per ogni } t\,;$$

(4″) $$(u)_{x=0} = \varrho_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \varrho_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \alpha_n\right),\ \text{per ogni } t\,;$$

(4‴) $$u = \mathrm{V}_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} v \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \xi_n\right),\ \text{per ogni } x \text{ e } t,$$

in cui le $\xi_n$ possono essere funzione di $x$.

Col noto metodo di Eulero si giunge al seguente integrale generale che soddisfa pure la condizione (4‴):

$$u = \mathrm{M}_0 e^{-\gamma_0 x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{M}_n e^{-\gamma_n x} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \beta_n - \vartheta_n x\right)$$
$$+ \mathrm{N}_0 e^{+\gamma_0 x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{N}_n e^{+\gamma_n x} \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi}{\mathrm{T}}\,t + \gamma_n + \vartheta_n x\right)$$

in cui le $\mathrm{M}_n$, $\mathrm{N}_n$, $\beta_n$ e $\gamma_n$ sono costanti arbitrarie che si devono determinare in modo che siano soddisfatte le condizioni (4') e (4''); le $\eta_n$ e $\vartheta_n$ sono:

$$\eta_n = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{p^2h^2}{4q^2h^2} + \frac{\pi^2 c^2 \varrho^2 n^2}{k^2 \mathrm{T}^2}} + \frac{ph}{2qk}\right.},$$

$$\vartheta_n = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{p^2h^2}{4q^2k^2} + \frac{\pi^2 c^2 \varrho^2 n^2}{k^2 \mathrm{T}^2}} - \frac{ph}{2qk}\right.}.$$

Come Ångstrom (1) per il caso di un filo indefinito, limitiamo le nostre ricerche agli armonici di periodo T, cioè ai termini corrispondenti ad $n = 1$ e per semplicità omettiamo l' indice. Senza diminuire la generalità noi possiamo evidentemente porre $\alpha_1 = 0$; la condizione per $x = 0$ diverrà così:

$$u = \varrho \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\mathrm{T}}.$$

Le (4') e (4'') ci daranno allora le seguenti equazioni colle quali potremo determinare M, N, $\beta$ e $\gamma$ in funzione di $\eta$, $\vartheta$ e $l$:

$$\begin{gathered} \mathrm{M}e^{-\eta l}\cos(\beta - \vartheta l) + \mathrm{N}e^{\eta l}\cos(\gamma + \vartheta l) = 0\,, \\ \mathrm{M}e^{-\eta l}\operatorname{sen}(\beta - \vartheta l) + \mathrm{N}e^{\eta l}\operatorname{sen}(\gamma + \vartheta l) = 0\,, \\ \mathrm{M}\operatorname{sen}\beta + \mathrm{N}\operatorname{sen}\gamma = 0\,, \\ \mathrm{M}\cos\beta + \mathrm{N}\cos\gamma = 1\,. \end{gathered}$$

Osservando quindi l' andamento periodico della temperatura nel punto $x = 0$, e calcolando dalle osservazioni col metodo di Bessel il primo armonico verremo a conoscere la somma:

$$\mathrm{M}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \beta\right) + \mathrm{N}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \gamma\right).$$

Eseguendo sul punto $x'$ la stessa osservazione e lo stesso calcolo conosceremo la somma:

$$\mathrm{M}e^{-\eta x'}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \beta - \vartheta x'\right) + \mathrm{N}e^{\eta x'}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \beta + \vartheta x'\right).$$

Avremo così due equazioni da cui potremo con metodi di successive approssimazioni dedurre le due incognite $\eta$ e $\vartheta$ e quindi le $k$ ed $h$.

*Determinazione dei coefficienti* $\omega_1$, $\omega_2$ *e* P *e verifica del valore di* J. L' osservazione della temperatura stazionaria per le due direzioni della corrente nel punto di contatto dei due fili ci conduce ad un' equazione che contiene le incognite P, $\omega_1$, $\omega_2$ ed J (2). La stessa osservazione in due altri punti qualsiasi, per esempio nei punti $x'_1$ ed $x'_2$ ci conduce a due altre equazioni

(1) Ångstrom, Annalen der Physik und Chemie, Band 114.

(2) Vedi questi Rendiconti, vol. VII, 1° sem., pag. 353.

delle stesse incognite, cioè a due valori della $U'_1$ ed $U_2$. Queste tre equazioni unitamente alla:

$$JQ = i\Delta p,$$

che si tratta di verificare, ci permettono di calcolare le incognite $\omega_1$, $\omega_2$, P ed J.

Mi riservo di comunicare nel prossimo fascicolo come furono realizzate esperimentalmente le condizioni supposte, come vennero eseguite le misure ed a quali risultati numerici si potè giungere.

**Fisica.** — *Sulla dipendenza tra il fenomeno di Zeemann e le altre modificazioni che la luce subisce dai vapori metallici in un campo magnetico.* Nota del dott. ORSO MARIO CORBINO, presentata dal Socio BLASERNA.

**Fisica.** — *Sui raggi catodici, sui raggi Röntgen e sulle dimensioni e la densità degli atomi.* Nota II di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

**Fisica.** — *Sul ripiegamento dei raggi Röntgen dietro gli ostacoli.* Nota dei dott. R. MALAGOLI e C. BONACINI, presentata dal Socio BLASERNA.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

**Fisica terrestre.** — *Sopra un sistema di doppia registrazione negli strumenti sismici.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio TACCHINI.

Una recente Nota del dott. A. Cancani sopra la registrazione, da lui chiamata *veloce-continua* (1), mi fa decidere a dare fin da ora un cenno di altri sistemi di registrazione sismica da me da poco adottati.

Si sa quanto beneficio la sismologia abbia ritirato dall'adozione della registrazione continua; ed è pur noto come i bisogni sempre più crescenti della sismometria abbian fatto sì che la velocità di scorrimento della carta bianca od affumicata sia andata sempre aumentando, non solo per la massima

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. VIII, pag. 46, seduta dell'8 gennaio 1899.