ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Colgo questa occasione per togliere di mezzo l' idea erronea, ma abbastanza diffusa, che possano essere classificati come nuovi, pianetini già trovati e con orbite difettose. Le costanti del piano, nel quale si muove un astro, risultano, salvo casi eccezionali, con sufficiente precisione anche da un'orbita circolare sulla base di due osservazioni, e coll' intervallo di 6 o 7 dì. Ordunque, o mancano i mezzi del tutto per fare un'orbita circolare, e allora la scoperta è come non avvenuta, e l'astro non ha classificazione di sorta; oppure vi è almeno un'orbita circolare, e questa basta per far rivolgere l'attenzione ad una eventuale identità. Se poi d' un astro si posseggono elementi ellittici, pur assai difettosi, e che perciò sia smarrito, allorquando occasionalmente lo si ritrovi, l'accertamento dell' identità diventa cosa ben più facile per altri caratteri orbitali (moto medio — eccentricità — orientamento dell'asse primario) che i due astri debbono avere in comune. Così ad es: il pianetino, che è smarrito da più lungo tempo, è (99) Dike. Sono 30 anni che è perduto; tuttavia si sa che la sua orbita era molto eccentrica e notabilmente inclinata (14°), che la longitudine del nodo era circa 42°, il moto medio circa 760″ e l' orientamento dell' asse primario (longitudine del perielio) circa 240°: ne abbiamo di troppo per accertare l' identità, quando occasionalmente lo si ritrovasse.

Matematica. — *Sopra le superficie a curvatura costante positiva.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Per le superficie a curvatura costante negativa (pseudosferiche) si conoscono, come è ben noto, metodi di trasformazione che, partendo da una superficie nota di questa classe, permettono di dedurne infinite nuove superficie, colla medesima curvatura, dipendenti da un numero, che si può far crescere ad arbitrio, di costanti arbitrarie (1). Ma i ripetuti tentativi dei geometri per costruire un' analoga teoria per le superficie a curvatura costante positiva erano rimasti fin qui senza successo. E le superficie note di questa classe si riducevano alle superficie di rotazione, alle elicoidali e a quelle con un sistema di linee di curvature piane o sferiche. Ora, continuando le ricerche della mia Nota precedente (2), sono stato finalmente condotto a conseguire la desiderata trasformazione, stabilendo il teorema:

Da ogni superficie Σ a curvatura costante positiva nota, integrando un' ordinaria equazione differenziale del 2° ordine, si deducono ∞^3 nuove superficie Σ' colla medesima curvatura; da ciascuna di queste si deducono,

(1) V. Darboux, *Leçons III,* Chap. XII e le mie *Lezioni di geometria differenziale,* Cap. XVII.

(2) Questi Rendiconti, seduta del 23 febbraio.

nel medesimo modo, ∞^3 nuove superficie della medesima classe e così via illimitatamente.

La circostanza che: *siffatte trasformazioni conservano le linee di curvatura ed i sistemi coniugati*, affatto analogamente come le note trasformazioni complementari e di Bäcklund delle superficie pseudosferiche accresce l'importanza del risultato conseguito. Ciò fa prevedere infatti che la trasformazione stessa, oltre che alle superficie a curvatura costante positiva isolate, potrà anche molto probabilmente applicarsi ai sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di tali superficie, sistemi che erano rimasti fin qui inaccessibili alle trasformazioni.

2. Nella presente Nota preliminare mi limiterò ad enunciare i teoremi fondamentali, dai quali l'accennata trasformazione dipende, lasciando loro quella forma provvisoria che mi si è presentata in questi primi calcoli. Ma penso naturalmente che gli studî successivi dovranno dare al risultato una forma geometrica definitiva più semplice.

Sia dunque Σ una superficie a curvatura costante positiva K, e facciamo per semplicità $K = +1$. L'elemento lineare di Σ, riferito alle linee di curvatura u, v prende la nota forma (1):

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, du^2 + \cosh^2 \theta \, dv^2 ,$$

dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0 .$$

Sopra la normale a Σ in ogni suo punto M si porti un segmento

$$T = MM' ,$$

che, considerato come funzione di u, v, soddisfi al seguente sistema simultaneo di equazioni a derivate parziali, l'una del 1°, l'altra del 2° ordine, sistema che in forza della (a) è *illimitatamente integrabile* (2):

$$(A)\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 = cT^2 - (c+1)\\ &\frac{\partial^2 T}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} + \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} +\\ &\quad + \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial \theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u} .\end{aligned}\right.$$

(1) V. *Lezioni*, pag. 446.

(2) Questo sistema di equazioni cui deve soddisfare il segmento T fu da me ritrovato applicando le formole della Nota precedente e il teorema nuovamente conseguito che sulla superficie Σ normale ai raggi e sulla riflettente S si corrispondono i sistemi coniugati.

Nella prima formula (A) c indica una costante arbitraria che per altro, quando si assuma negativa, si supporrà (per restare a costruzioni geometriche reali) in valore assoluto > 1. L'integrale generale T del sistema (A) contiene, oltre c, due nuove costanti arbitrarie c', c''; scriviamo

$$T = T(u, v; c, c', c'').$$

Fissiamo ad arbitrio i valori delle tre costanti c, c', c'', sicchè il segmento

$$(b) \qquad MM' = T(u, v; c, c', c'')$$

avrà in ogni punto M di Σ un valore determinato. Ciò premesso, e supposto che non sia nè $\frac{\partial T}{\partial u} = 0$ nè $\frac{\partial T}{\partial v} = 0$, ecco i due teoremi fondamentali per la nostra trasformazione:

1° Sopra la normale in ogni punto M *della superficie* Σ *a curvatura costante positiva* $K = +1$ *si porti il segmento* MM' *definito dalla* (b); *il luogo degli estremi* M' *è una superficie* S *applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione se* $c < 0$ (*cioè* $T^2 < 1$), *e invece sull'iperboloide di rotazione a due falde quando* $c > 0$ (*ovvero* $T^2 > 1$); *il semiasse maggiore nel primo caso e il semiasse trasverso nel secondo avendo una lunghezza* $= 1$.

2° Se i raggi MM' *si riflettono sulla superficie* S *e sopra ogni raggio riflesso si stacca, a partire da* M' *un segmento* $M'N = MM'$, *il luogo del punto* N *è una nuova superficie* Σ' *colla medesima curvatura* $K = +1$, *le cui normali sono i raggi stessi riflessi.*

È chiaro così come, per ogni terna di valori attribuiti alle tre costanti c, c', c'', si ottiene dalla Σ una nuova superficie Σ' applicabile sulla sfera. L'integrazione del sistema (A) che, pel noto teorema di Mayer, si riduce all'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del 2° ordine fa dunque nascere da Σ, conformemente a quanto si è asserito al n. 1, una *tripla infinità* di nuove superficie colla medesima curvatura. Per ciascuna delle nuove superficie ottenute si potrà manifestamente ripetere la medesima operazione e così via illimitatamente, dove è da osservarsi inoltre che delle nuove equazioni differenziali di 2° ordine da integrarsi è già nota una soluzione particolare, quella che corrisponde alla superficie riflettente.

È poi evidente che: *Il metodo stesso fa conoscere infinite deformate per flessione dell'ellissoide allungato e dell'iperboloide a due falde di rotazione.*

Osserverò ancora che teoremi perfettamente analoghi sussistono per le superficie pseudosferiche, dove, secondo quanto ho stabilito nella precedente Nota, varia soltanto la superficie riflettente, che può essere applicabile sopra tre distinti tipi di superficie di rotazione.

Resta per altro da esaminare se queste trasformazioni delle superficie pseudosferiche hanno relazione con quelle già prima note e quali.

3. Per dimostrare, almeno in un esempio, un'effettiva applicazione dei nuovi metodi, parto della semplice soluzione $\theta = 0$ della equazione fondamentale (a). Allora il sistema (A) diventa:

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 = cT^2 - (c+1) \\ &\frac{\partial^2 T}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Dalla seconda integrata si ha

$$T = UV,$$

essendo U, V rispettivamente funzioni di u, v. Sostituendo questo valore nella prima, si ha

$$\frac{U'^2}{U^2} + U^2(V'^2 - cV^2) + (c+1) = 0;$$

questa si scinde nelle due

$$\text{(C)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &V'^2 - cV^2 = b \\ &\frac{U'^2}{U^2} + bU^2 + c + 1 = 0, \end{aligned} \right.$$

dove b è una nuova costante. Si osservi che $T = UV$ non si altera moltiplicando U per un fattore costante e dividendo V pel medesimo fattore, onde si vede che, senza alterare la generalità, si può moltiplicare b per un fattore quadrato qualsiasi. Così il numero delle costanti arbitrarie, che entrano nell'integrale generale T del sistema (B), è effettivamente di 3, conformemente alle osservazioni generali. Di più, nel caso particolare che stiamo ora esaminando, avviene che le due nuove costanti c', c'', additive in u, v rispettivamente, non hanno alcuna influenza sulla forma della superficie, il cangiare dei loro valori equivalendo soltanto a movimenti della superficie. Per integrare il sistema (C) si distingua secondo che c è negativa o positiva. Nel primo caso pongasi

$$(\alpha) \qquad c = -\frac{1}{a^2}\,(a < 1), \quad b = \frac{1}{a^2}$$

e nel secondo

$$(\beta) \qquad c = \frac{1}{a^2} \quad b = -\frac{1}{a^2}$$

e si troverà rispettivamente [1]

[1] Per quanto si è detto al num. precedente, si escludono i casi in cui U o V siano costanti.

$$(\alpha^\star)\qquad \mathrm{U}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh\left(\dfrac{u\sqrt{1-a^2}}{a}\right)},\quad \mathrm{V}=\operatorname{sen}\left(\frac{v}{u}\right)$$

$$(\beta^\star)\qquad \mathrm{U}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{u\sqrt{a^2-1}}{a}\right)},\quad \mathrm{V}=\cosh\left(\frac{v}{u}\right).$$

Partendo dal corrispondente valore di $\mathrm{T}=\mathrm{UV}$ e cangiando semplicemente i parametri u, v si ottengono come superficie riflettenti le due date dalle formole seguenti:

$$(\alpha')\quad \bar{x}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh u}\cos\left(\frac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\operatorname{sen}v,\quad \bar{y}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cosh u}\operatorname{sen}\left(\frac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\operatorname{sen}v,\quad \bar{z}=av$$

$$(\beta')\quad \bar{x}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}u}\cos\left(\frac{au}{\sqrt{1+a^2}}\right)\cosh v,\quad \bar{y}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\operatorname{sen}u}\operatorname{sen}\left(\frac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)\cosh v,\quad \bar{z}=av.$$

La prima di esse è applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semiasse maggiore $=1$ e di semiasse minore $=a$; la seconda sull'iperboloide di rotazione a due falde di semiasse trasverso $=1$ e di semiasse coniugato $=a$ (1).

Per le superficie a curvatura costante positiva $=+1$, normali ai raggi riflessi, si trovano poi nel primo caso le formole seguenti.

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2a\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}v}{\cosh^2u-(1-a^2)\operatorname{sen}^2v}\left\{a\cosh u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)-\sqrt{1-a^2}\operatorname{senh}u\operatorname{sen}\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right\} \\ y'=\dfrac{2a\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}v}{\cosh^2u-(1-a^2)\operatorname{sen}^2v}\left\{a\cosh u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)-\sqrt{1-a^2}\operatorname{senh}u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right\} \\ z'=av-\dfrac{2a(1-a^2)\operatorname{sen}v\cos v}{\cosh^2u-(1-a^2)\operatorname{sen}^2v}, \end{cases}$$

e nel secondo caso le altre

$$\begin{cases} x'=\dfrac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh v}{(a^2+1)\cosh^2v-\operatorname{sen}^2u}\left\{a\operatorname{sen}u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)-\sqrt{a^2+1}\cos u\operatorname{sen}\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right\} \\ y'=\dfrac{2a\sqrt{a^2+1}\cosh v}{(a^2+1)\cosh^2v-\operatorname{sen}^2u}\left\{a\operatorname{sen}u\operatorname{sen}\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)-\sqrt{a^2+1}\cos u\cos\left(\dfrac{au}{\sqrt{a^2+1}}\right)\right\} \\ z'=av-\dfrac{2a(a^2+1)\operatorname{senh}v\cosh v}{(a^2+1)\cosh^2v-\operatorname{sen}^2v}. \end{cases}$$

(1) In coordinate cilindriche r, θ, z le equazioni di queste due superficie hanno la forma semplice

$$r\cosh\left(\frac{\theta\sqrt{1-a^2}}{a}\right)=\sqrt{1-a^2}\operatorname{sen}\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$r\operatorname{sen}\left(\frac{\theta\sqrt{a^2+1}}{a}\right)=\sqrt{a^2+1}\operatorname{senh}\left(\frac{z}{a}\right).$$

Ambedue le volte le superficie corrispondenti, applicabili sulla sfera di raggio $=1$, hanno le linee di curvatura $u = \text{cost}^{\text{te}}$ situate su piani per l'asse z e perciò le linee di curvatura dell'altro sistema sono sopra sfere col centro sul medesimo asse, ortogonali alla superficie. Esse appartengono alla classe di superficie di Enneper e precisamente a quel caso limite la cui esistenza, sfuggita ad Enneper, fu avvertita da Kuen [1]. Aggiungiamo l'osservazione che se nelle ultime formole si suppone la costante $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ commensurabile: *Le linee di curvatura sferiche delle corrispondenti superficie a curvatura costante $k=+1$ sono curve algebriche razionali.*

Matematica. — *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

Il recente teorema pubblicato dal sig. Hadamard nel T. XXII degli Acta Mathematica e che ha così vivamente destata l'attenzione degli analisti, ha suggerito al sig. Hurwitz [1] una osservazione assai interessante. Il sig. Hadamard dimostrava che date due funzioni

$$f(x) = \sum p_n x^n\,, \quad f_1(x) = \sum q_n x^n\,,$$

la funzione definita dalla serie

$$\gamma(x) = \sum a_n b_n x^n$$

ha singolarità nei soli punti i cui affissi sono il prodotto dell'affisso di una singolarità di $f(x)$ per quello di una singolarità di $f_1(x)$ [2]; invece il sig. Hurwitz considera due funzioni $\alpha(x)\,, \varphi(x)$ definite dalle serie

$$\alpha(x) = \sum \frac{a_n}{x^{n+1}}\,, \quad \varphi(x) = \sum \frac{k_n}{x^{n+1}}$$

e dimostra che la serie

$$\psi(x) = \sum \left(a_n k_0 + n a_{n-1} k_1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} a_{n-2} k_2 + \cdots + a_0 k_n \right) \frac{1}{x^{n+1}} \tag{1}$$

rappresenta una funzione avente singolarità nei soli punti i cui affissi sono la somma dell'affisso di una singolarità di $\alpha(x)$ con quello di una singolarità di $\varphi(x)$. Egli limita però la sua dimostrazione al caso che le singolarità di $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, fuori del punto $x=0$, siano poli del primo ordine.

[1] Sitzungsberichte der Akademie zu München, 1884, Heft II.

[2] Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 6 février 1899.

[3] Ed inoltre, se $\gamma(x)$ non è uniforme, eventualmente anche nel punto $x=0$, come ha fatto osservare il sig. Borel (Bulletin de la Soc. Math. de France, T. XXVI, 1898.)