ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Ambedue le volte le superficie corrispondenti, applicabili sulla sfera di raggio $=1$, hanno le linee di curvatura $u = \text{cost}^{\text{te}}$ situate su piani per l'asse z e perciò le linee di curvatura dell'altro sistema sono sopra sfere col centro sul medesimo asse, ortogonali alla superficie. Esse appartengono alla classe di superficie di Enneper e precisamente a quel caso limite la cui esistenza, sfuggita ad Enneper, fu avvertita da Kuen [1]. Aggiungiamo l'osservazione che se nelle ultime formole si suppone la costante $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ commensurabile: *Le linee di curvatura sferiche delle corrispondenti superficie a curvatura costante $k=+1$ sono curve algebriche razionali.*

Matematica. — *Sulle singolarità di una funzione che dipende da due funzioni date.* Nota del Corrispondente S. PINCHERLE.

Il recente teorema pubblicato dal sig. Hadamard nel T. XXII degli Acta Mathematica e che ha così vivamente destata l'attenzione degli analisti, ha suggerito al sig. Hurwitz [1] una osservazione assai interessante. Il sig. Hadamard dimostrava che date due funzioni

$$f(x) = \sum p_n x^n, \quad f_1(x) = \sum q_n x^n,$$

la funzione definita dalla serie

$$\gamma(x) = \sum a_n b_n x^n$$

ha singolarità nei soli punti i cui affissi sono il prodotto dell'affisso di una singolarità di $f(x)$ per quello di una singolarità di $f_1(x)$ [2]; invece il sig. Hurwitz considera due funzioni $\alpha(x)$, $\varphi(x)$ definite dalle serie

$$\alpha(x) = \sum \frac{a_n}{x^{n+1}}, \quad \varphi(x) = \sum \frac{k_n}{x^{n+1}}$$

e dimostra che la serie

$$(1) \quad \psi(x) = \sum \left(a_n k_0 + n a_{n-1} k_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{n-2} k_2 + \cdots + a_0 k_n \right) \frac{1}{x^{n+1}}$$

rappresenta una funzione avente singolarità nei soli punti i cui affissi sono la somma dell'affisso di una singolarità di $\alpha(x)$ con quello di una singolarità di $\varphi(x)$. Egli limita però la sua dimostrazione al caso che le singolarità di $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, fuori del punto $x=0$, siano poli del primo ordine.

(1) Sitzungsberichte der Akademie zu München, 1884, Heft II.

(2) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 6 février 1899.

(3) Ed inoltre, se $\gamma(x)$ non è uniforme, eventualmente anche nel punto $x=0$, come ha fatto osservare il sig. Borel (Bulletin de la Soc. Math. de France, T. XXVI, 1898.)

Ora, nello stesso modo che $\gamma(x)$ si ottiene da $f(x)$ ed $f_1(x)$ mediante una speciale operazione distributiva ([1]), così anche la funzione $\psi(x)$ è ottenuta da $\alpha(x)$, $\varphi(x)$ mediante un'operazione distributiva, dalla cui considerazione, senza che occorra ricorrere ad integrali curvilinei, è possibile di ottenere la dimostrazione del teorema del sig. Hurwitz, in un caso più generale di quello trattato dall'autore stesso nella citata Nota.

1. Sia $\alpha(x)$ una funzione uniforme, regolare nell'intorno di $x=\infty$ e nulla in questo punto, le cui singolarità siano rappresentate genericamente con u; sia

$$\alpha(x)=\sum\frac{a_n}{x^{n+1}}$$

nell'intorno di $x=\infty$. Costruisco la serie:

$$\mathrm{A}(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\frac{\varphi^n(x)}{n!}, \tag{2}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione analitica arbitraria e $\varphi^{(n)}(x)$ è la sua derivata n^{sima}. La serie (2) rappresenta un'operazione funzionale distributiva, e dalla sua forma si scorge subito che essa è *commutabile colla derivazione.*

2. Prendiamo come funzione $\varphi(x)$ una funzione uniforme, regolare nell'intorno di $x=\infty$, nulla in questo punto; siano v le sue singolarità; nell'intorno di $x=\infty$ si abbia

$$\varphi(x)=\sum\frac{k_n}{x^{n+1}}.$$

Si vede allora immediatamente che per valori di x abbastanza grandi in modulo, si ha

$$\mathrm{A}(\varphi)=\psi(x)=\sum\left(a_n k_0+na_{n-1}k_1+\frac{n(n-1)}{1.2}a_{n-2}k_2+\cdots+a_0k_n\right)\frac{1}{x^{n+1}};$$

l'operazione (2) ci dà dunque, per tali valori di x, la funzione considerata dal sig. Hurwitz.

3. Ma, poichè l'operazione A è commutabile colla derivazione, essa sarà pure commutabile coll'operazione funzionale

$$\theta^z=\mathrm{D}^0+z\mathrm{D}+\frac{z^2}{1.2}\mathrm{D}^2+\cdots$$

che ha per effetto di mutare x in $x+z$. Si avrà dunque

$$\theta^z\mathrm{A}(\varphi)=\psi(x+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\frac{\varphi^{(n)}(x+z)}{n!}$$

([1]) Borel, loc. cit. Su questa operazione, v. una mia Nota nei Rendiconti della R. Accademia delle scienze di Bologna (adunanza del 19 febbraio 1899).

e sviluppando le derivate di $\varphi(x)$, si ottiene, per valori abbastanza grandi in modulo della variabile x:

$$\theta^z \mathrm{A}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} \tag{3}$$

dove si è posto

$$\alpha_n(z) = \alpha_0 z^n - n a_1 z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n.$$

Per $z = 0$, la (3) ricade nella (1).

Dalla (3) si ha poi, applicandola θ^{-z} e notando che $\theta^z \mathrm{A} \theta^{-z} = \mathrm{A}$:

$$\mathrm{A}(\varphi) = \sum \alpha_n(z) \frac{\varphi^{(n)}(x-z)}{n!}. \tag{4}$$

4. La formula (4) dà una espressione dell' operazione (A), che avrà generalmente validità in un campo più esteso di quello della (2), potendosi in essa disporre dell' arbitraria z. Essa coincide colla (2) e colla (1) per valori di x abbastanza grandi, e quindi dà la continuazione analitica di $\psi(x)$.

5. Si tratta ora di trovare le condizioni di convergenza del secondo membro della (4); qui tornerà opportuno di fare uso della notazione, che ho spesso adoperata,

$$g_n \sim t^n,$$

per esprimere che la serie $\sum g_n x^n$ ammette come cerchio di convergenza quello di raggio t.

Se nella (4) poniamo, in luogo di $\varphi(x)$, la funzione $\frac{1}{x}$, si ottiene

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum (-1)^n \alpha_n(z) \frac{1}{(x-z)^{n+1}},$$

la quale, in forza della (1), non è altro che $\alpha(x)$. Ne risulta che, detto u_i il punto singolare di $\alpha(x)$ più lontano da z, si ha

$$\alpha_n(z) \sim |z-u_i|^n. \tag{5}$$

Inoltre, per le note condizioni di validità dello sviluppo di Taylor per le funzioni analitiche, si ha, essendo v_j quello dei punti v più prossimo ad $x-z$:

$$\frac{\varphi^{(n)}(x-z)}{n!} \sim \frac{1}{|x-z-v_j|^n}. \tag{6}$$

Dalle (5) e (6) si deduce per il secondo membro della (4) la condizione di convergenza assoluta ed uniforme espressa da

$$\left|\frac{z-u_i}{x-z-v_j}\right| < \varepsilon, \tag{7}$$

essendo ε un numero positivo e minore di uno. Da questa condizione si traggono varie conseguenze.

6. Supponiamo dapprima che $\alpha(x)$ abbia la sola singolarità isolata per $x = u$. Fatto allora $z = u$, la condizione (7) si riduce ad

$$|x - (u + v_j)| > 0$$

e la $A(\varphi)$ assume l'espressione

$$A(\varphi) = \sum \alpha_n(u) \frac{\varphi^{(n)}(x-u)}{n!} = \psi(x). \tag{8}$$

Questa espressione dimostra che le sole singolarità di $\psi(x)$ si hanno per $x = u + v_j$ essendo v_j un punto singolare qualunque di $\varphi(x)$. Inoltre, poichè $\alpha_n(u) \sim 0$, essa dà anche la *natura* di queste singolarità. In particolare, se $\alpha(x)$ ha per $x = u$ un polo di ordine k^{mo}

$$\alpha(x) = \frac{b_1}{x-u} + \frac{b_2}{(x-u)^2} + \cdots + \frac{b_k}{(x-u)^k},$$

viene per $\psi(x)$ l'espressione:

$$\psi(x) = b_1 \varphi(x-u) + b_2 \varphi'(x-u) + \cdots + \frac{b_k}{k-1!} \varphi^{(k-1)}(x-u).$$

7. Supponiamo poi che $\alpha(x)$ abbia m singolarità isolate nei punti $u_1, u_2 \dots u_m$. Si può porre allora

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x), \quad \alpha_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in} \frac{1}{x^{n+1}},$$

dove $\alpha_i(x)$ è singolare come $\alpha(x)$ nel punto $x = u_i$, e regolare in ogni altro punto del piano. Posto

$$\alpha_{in}(z) = a_{i0} z^n - n a_{i1} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_{i2} z^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_{in},$$

viene, poichè A è distributiva anche rispetto ad $\alpha(x)$:

$$A(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{in}(u_i) \frac{\varphi^{(n)}(x-u_i)}{n!} \tag{9}$$

che, per essere $\alpha_{in}(u_i) \sim 0$, è singolare nei soli punti $u_i + v_j$. La formula (9) dà inoltre la *natura* delle singolarità in questi punti.

8. In generale, fissato z, la curva limite del campo di convergenza dello sviluppo (4) rispetto ad x è dato da

$$|z - u_i| = |x - z - v_j|.$$

Questo limite è una circonferenza di centro $z + v_j$ e di raggio $|z - u_i|$. Essa passa dunque per il punto $x = u_i + v_j$. Variando z di pochissimo, il nuovo limite di convergenza sarà dato da una seconda circonferenza passante per il medesimo punto. Ma siccome i limiti di convergenza sono caratterizzati in generale dall'esistenza, su di essi, di qualche singolarità della funzione $A(\varphi)$ che la serie rappresenta, così si scorge come i punti singolari siano appunto quelli della forma $u_i + v_j$.

9. È facile indicare la via per un'ampia generalizzazione. Abbiasi l'operazione distributiva $A(\varphi)$, che, applicata ad una funzione φ, dà l'espressione, valida in un'area T, di una seconda funzione ψ. Sia A permutabile colle operazioni distributive di un gruppo ad un parametro, S_z. Sarà allora

$$\psi = S_z A S_z^{-1},$$

e qui si potrà disporre del parametro z in modo che questa nuova espressione di ψ ne dia la continuazione analitica oltre all'area T. Inoltre, le condizioni di validità di quest'espressione potranno fare conoscere le singolarità di ψ, dipendentemente da quelle di φ. È questo il metodo applicato nella presente Nota per l'operazione di Hurwitz; il gruppo permutabile con A è qui θ^z la cui operazione infinitesima è D. Per l'operazione di Hadamard, il gruppo permutabile S_z è invece costituito dalla operazione che ha per effetto di sostituire xz ad x in una funzione arbitraria, e l'operazione infinitesima di questo gruppo è xD.

Chimica. — *Sulla costituzione dell'acido canforico* (¹). Nota 9ª del Corrispondente L. Balbiano.

Nella Nota intitolata nello stesso modo della presente ed inserita nei Rendiconti di quest'Accademia (²), venivo alla conclusione « che si spiegano razionalmente, senza ricorrere ad ipotetiche trasposizioni molecolari, i prodotti di smembramento dell'acido canforico, da me ottenuti nell'ossidazione a temperatura ordinaria col permanganato potassico in soluzione alcalina, solo quando si adotti per quest'acido la formula di costituzione proposta dal Bredt ». Il prodotto principale di questa ossidazione è l'acido $C_8H_{12}O_5$ di cui dimostrai la costituzione in modo sicuro, perchè, eliminate con fatti le possibilità che il quinto atomo di ossigeno fosse contenuto nella molecola sotto forma chetonica, lattonica ed ossidrilica, non rimase che la forma di ossido alchilico comprovata dal comportamento dell'acido colla p-bromofenilidrazina. Per riduzione coll'acido jodidrico ottenni dall'acido $C_8H_{12}O_5$ l'acido α-$\beta\beta$-trimetilglutarico, del quale dedussi la costituzione dal formarsi all'ossidazione acido dimetilsuccinico assimetrico e dal passaggio dell'acido $C_8H_{12}O_5$ all'acido trimetilsuccinico mediante una serie di trasformazioni semplici. Le

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica farmaceutica della R. Università di Roma.
(²) Rend. Acc. Linc., vol. VI, 2° sem., pag. 2.