ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

saranno A, B soluzioni del sistema:

$$A(\sigma_1 \pm i\tau_1) + B(\sigma_2 \pm i\tau_2) = 1,$$

da cui:

$$A = \frac{\tau_2}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1}, \quad B = \frac{-\tau_1}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1}. \tag{22}$$

Ne viene, scrivendo x, y, z per x_1, x_2, x_3:

Le equazioni $\frac{\partial u}{\partial z} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}$ *a coppie di integrali ortogonali sono tutte e soltanto quelle, in cui* A, B *hanno i valori* (22), *che si ricavano, per mezzo delle* (17), (19) *da ogni soluzione* Ξ *della* (18').

Matematica. — *Sulle deformazioni infinitesime delle superficie negli spazî a curvatura costante.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Luigi Bianchi.

L'argomento della presente Nota mi è stato proposto dal mio maestro prof. Luigi Bianchi, ritenendo egli che per le deformazioni infinitesime delle superficie flessibili e inestendibili negli spazî a curvatura costante dovesse valere un teorema del tutto analogo a quello che collega, nello spazio ordinario, lo studio di siffatte deformazioni alla teoria delle cosidette congruenze W [1]. Questa supposizione si troverà appunto confermata nelle pagine seguenti, dove deduco inoltre dal teorema fondamentale alcune conseguenze, che mi sembrano degne di nota.

L'elemento lineare di uno spazio ellittico è:

$$ds^2 = R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{1}$$

quando sia

$$1 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \tag{2}$$

Siano le (x), soddisfacenti alla (2), funzioni di due variabili u, v definenti una superficie S; sia S' una superficie infinitamente vicina applicabile sulla S e sia $(x_i + \varepsilon \overline{x}_i)$ il punto della S' che corrisponde al punto generico (x_i) della S. Affinchè le $(x + \varepsilon \overline{x})$, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, soddisfacciano alla (2), deve essere

$$\sum x_i \overline{x}_i = 0 \tag{3}$$

e la condizione di applicabilità diventa:

$$\sum dx_i \, d\overline{x}_i = 0. \tag{4}$$

[1] Bianchi, *Geometria differenziale* (cap. XII, pag. 300).

Senza procedere oltre nella risoluzione del sistema (3), (4) vediamone il significato geometrico: la (3) ci dice che i punti (x_i), $(\overline{x}_i)$ sono coniugati rispetto all' assoluto; la (4) che i piani

$$(\alpha) \qquad dx_0 X_0 + \cdots + dx_3 X_3 = 0$$

e

$$(\beta) \qquad d\overline{x}_0 X_0 + \cdots d\overline{x}_3 X_1 = 0$$

(dove con X_i indichiamo le coordinate correnti) sono normali; ora il piano (α) è il piano normale all' elemento della superficie S unente i punti x_i e $(x_i + dx_i)$ nel punto (x_i) perchè per la (2) si ha

$$\sum x_i\, dx_i = 0 .$$

Il piano (β) è pure normale alla retta unente il punto (x_i) al punto $(\overline{x}_i + d\overline{x}_i)$, ma non passa per il punto $(\overline{x}_i)$ a meno che non sia $\sum \overline{x}_i^2 = \text{cost.}$ o ciò che non toglie per nulla la generalità, che non sia

$$(5) \qquad \sum \overline{x}_i^2 = 1 .$$

Ciò che dimostra una analogia e insieme una differenza da quanto avviene nello spazio euclideo. Di più se la (5) è soddisfatta, si può dare una altra interpretazione finita. Posto

$$x_i = X_i + \overline{X}_i \qquad \overline{x}_i = X_i - \overline{X}_i$$

abbiamo

$$(6) \qquad \begin{cases} \sum X_i^2 = \sum \overline{X}_i^2 = \text{cost.} \\ \sum X_i \overline{X}_i = 0 \\ \sum dX_i^2 = \sum d\overline{X}_i^2 , \end{cases}$$

cosicchè la superficie luogo del punto (X_i) e quella luogo del punto $(\overline{X}_i)$ sono *applicabili* e *punti corrispondenti sono coniugati rispetto all' assoluto*; viceversa da una tale coppia di superficie si deduce una deformazione della specie considerata e (diremo con modo improprio) due superficie che si corrispondono con ortogonalità d' elementi.

L' esistenza di tali deformazioni non può essere messa in dubbio; basta infatti porre

$$\overline{x}_0 = -x_1 ; \quad \overline{x}_1 = x_0 ; \quad \overline{x}_2 = -x_3 ; \quad \overline{x}_3 = x_2$$

perchè le (3), (4), (5) sieno soddisfatte. Vedremo poi un' altra curiosa proprietà di siffatte deformazioni.

Procediamo ora a dimostrare la proprietà fondamentale della teoria, cioè che *il problema delle deformazioni infinitesime delle superficie nello spazio euclideo e quello negli spazî a curvatura costante sono problemi affatto equivalenti.*

Faremo vedere come, interpretando (ciò che è evidentemente lecito) i rapporti $\frac{x_0}{x_3}$, $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$ come coordinate cartesiane ortogonali nello spazio euclideo, la superficie T di questo spazio, corrispondente alla S, ammette una deformazione infinitesima, in cui le componenti dello spostamento secondo i tre assi sono proporzionali a $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2$ col fattore di proporzionalità $\lambda = \frac{1}{x_3}$ a meno di un fattore costante. E sviluppando infatti

$$d(\lambda\overline{x}_0)\, d\left(\frac{x_0}{x_3}\right) + d(\lambda\overline{x}_1)\, d\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + d(\lambda\overline{x}_2)\, d\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$$

ricordando le (2), (3), (4) si riconosce che a meno di un fattore finito esso è uguale a

$$(d \log \lambda + d \log x_3) \sum \overline{x}_i\, dx_i$$

e si annulla quindi se λ è inversamente proporzionale a x_3, ciò che prova il nostro asserto.

E si noti che, dette x, y, z, le coordinate cartesiane succitate, avremo

$$x_0 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\quad x_1 = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\quad x_2 = \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$$
$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$$

insieme alle:

$$\overline{x}_0 = \frac{\overline{x}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\quad \overline{x}_1 = \frac{\overline{y}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},\quad \overline{x}_2 = \frac{\overline{z}}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$$
$$\overline{x}_3 = \frac{-(x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z})}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}.$$

Da queste formule si deduce pure immediatamente che da una deformazione infinitesima della T si ricava una deformazione infinitesima della S.

Si osservi ora che nella rappresentazione ora considerata dello spazio non euclideo, l'ordine dei contatti e quindi anche le asintotiche delle superficie si conservano; e siccome $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ sono proporzionali a $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2$, si vede che nei due spazî si corrispondono le rette perpendicolari alla direzione degli spostamenti di due punti corrispondenti di S e T, poste nei rispettivi piani tangenti; donde risulta il teorema:

Se noi per ogni punto della S *tiriamo la geodetica normale alla direzione dello spostamento, otteniamo una congruenza* W; *viceversa ogni tale congruenza si può ottenere in questa maniera.*

La seconda falda focale Σ di questa congruenza W è l'inviluppo dei piani polari dei punti di $\overline{\mathrm{S}}$ rispetto all'assoluto; quindi:

Le superficie $\overline{\mathrm{S}}$ *e* Σ *sono duali*, ciò che non avviene per lo spazio euclideo. Di più poichè per la S e la Σ i problemi delle deformazioni infinitesime sono affatto equivalenti, perchè tali sono i problemi analoghi per le loro immagini nello spazio euclideo, e poichè una reciprocità muta una congruenza W in un'altra W, si ha che:

Il problema delle deformazioni infinitesime per la S *e quello per la* $\overline{\mathrm{S}}$ *sono in uno spazio a curvatura positiva costante affatto equivalenti.*

Si ha poi, come è chiaro:

La seconda falda focale $\overline{\Sigma}$ *della congruenza* W *generata da quella deformazione infinitesima della* $\overline{\mathrm{S}}$ *che corrisponde alla considerata deformazione della* S, *è la reciproca di* S *rispetto l'assoluto.*

Poichè il problema delle deformazioni infinitesime della superficie luogo del punto $(\overline{x_i})$ in uno spazio a curvatura costante è equivalente al problema analogo per la superficie dello spazio euclideo, luogo del punto:

$$\left(x = \frac{\overline{x}_0}{\overline{x}_3}\,,\ y = \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_3}\,,\ z = \frac{\overline{x}_2}{\overline{x}_3}\right)$$

si ha che:

Date due superficie dello spazio euclideo T, $\overline{\mathrm{T}}$, *corrispondenti per ortogonalità d'elementi e detto* (x, y, z) *un punto generico della* T *e* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ *il punto corrispondente della* $\overline{\mathrm{T}}$, *il problema delle deformazioni infinitesime della* T *e quello della superficie luogo del punto*:

$$\left(x = \frac{\overline{x}}{x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}}\,,\ y = \frac{\overline{y}}{x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}}\,,\ z = \frac{\overline{z}}{x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}}\right)$$

sono equivalenti.

Osservazione 1ª. Il teorema, che per superficie collineari i problemi delle deformazioni infinitesime sono affatto equivalenti è ora messo in nuova luce dal fatto che ai movimenti degli spazî a curvatura costante corrispondono collineazioni dello spazio euclideo.

Osservazione 2ª. Molti dei teoremi su notati si generalizzano, ricordando che, a meno di quadrature, il problema delle deformazioni infinitesime a meno di infinitesimi del second'ordine e quello a meno d'infinitesimi dell'ordine n^{esimo} sono equivalenti.

Osservazione 3ª. Poichè la $\overline{\mathrm{S}}$ è la duale della Σ e poichè quando la (5) è verificata la S e la $\overline{\mathrm{S}}$ si corrispondono (diremo così, sebbene non correttamente) con ortogonalità di elementi, si ha la seguente curiosa proprietà delle deformazioni infinitesime per cui la (5) è verificata:

Le rette polari rispetto all'assoluto di due elementi s, σ *corrispondenti della* S *e della* Σ, *incontrano il piano tangente a* S(Σ) *relativo al* *punto iniziale di s (di σ) in due punti allineati col punto iniziale di σ(di s).*

Questa proprietà sussiste anche per le immagini della S e della Σ nello spazio euclideo; una superficie luogo del punto (x, y, z) ammette siffatte deformazioni; basta porre infatti, secondo l'esempio già citato per gli spazî a curvatura costante positiva

$$\bar{x} = -y\,,\ \bar{y} = x\,,\ \bar{z} = -1\,.$$

Osservazione 4ª. Ad analoghe conclusioni si perviene nel caso degli spazî iperbolici, come è ben naturale.

Matematica. — *Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari*. Nota di G. Fano, presentata dal Socio Cremona.

Matematica. — *Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni*. Nota del dott. P. Medolaghi, presentata dal Socio Cerruti.

Le precedenti due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla dipendenza tra il fenomeno di Zeemann e le altre modificazioni che la luce subisce dai vapori metallici in un campo magnetico*. Nota del dott. Orso Mario Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

In una Nota recentemente pubblicata dal prof. Macaluso e da me, abbiamo fatto vedere che i fenomeni di polarizzazione rotatoria magnetica anomala da noi osservati potevano dedursi, con tutte le particolarità che li accompagnano, dal fenomeno di Zeemann, ammettendo che, nel caso di luce incidente circolare, la curva che rappresenta gli indici di rifrazione per le diverse lunghezze d'onda si sposti, per azione del campo, senza deformazione, di una lunghezza eguale allo spostamento della curva che rappresenta gli assorbimenti.

Mi propongo anzitutto di esaminare a che si riduce questa ipotesi che ci è stata necessaria per giungere alla formola

$$(1)\qquad \varrho = -\frac{2\pi A l}{\lambda}\frac{dn}{d\lambda}\,H$$