ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

punto iniziale di s (di σ) in due punti allineati col punto iniziale di σ(di s).

Questa proprietà sussiste anche per le immagini della S e della Σ nello spazio euclideo; una superficie luogo del punto (x, y, z) ammette siffatte deformazioni; basta porre infatti, secondo l'esempio già citato per gli spazî a curvatura costante positiva

$$\bar{x} = -y\,,\ \bar{y} = x\,,\ \bar{z} = -1\,.$$

Osservazione 4ª. Ad analoghe conclusioni si perviene nel caso degli spazî iperbolici, come è ben naturale.

Matematica. — *Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari*. Nota di G. FANO, presentata dal Socio CREMONA.

Matematica. — *Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni*. Nota del dott. P. MEDOLAGHI, presentata dal Socio CERRUTI.

Le precedenti due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla dipendenza tra il fenomeno di Zeemann e le altre modificazioni che la luce subisce dai vapori metallici in un campo magnetico*. Nota del dott. ORSO MARIO CORBINO, presentata dal Socio BLASERNA.

In una Nota recentemente pubblicata dal prof. Macaluso e da me, abbiamo fatto vedere che i fenomeni di polarizzazione rotatoria magnetica anomala da noi osservati potevano dedursi, con tutte le particolarità che li accompagnano, dal fenomeno di Zeemann, ammettendo che, nel caso di luce incidente circolare, la curva che rappresenta gli indici di rifrazione per le diverse lunghezze d'onda si sposti, per azione del campo, senza deformazione, di una lunghezza eguale allo spostamento della curva che rappresenta gli assorbimenti.

Mi propongo anzitutto di esaminare a che si riduce questa ipotesi che ci è stata necessaria per giungere alla formola

$$(1)\qquad \varrho = -\frac{2\pi A l}{\lambda}\frac{dn}{d\lambda}\,H$$

ove ϱ indica la rotazione del piano di polarizzazione nel senso della corrente magnetizzante, l lo spessore attraversato del mezzo, n l' indice di rifrazione di questo per la luce che nel vuoto ha la lunghezza d'onda λ, H l' intensità del campo, e infine A una costante che misura l' effetto Zeemann per la riga considerata.

È facile vedere che la ipotesi suddetta è equivalente a quest' altra: che *le stesse costanti specifiche del mezzo da cui dipende l' assorbimento, determinino anche l' indice di rifrazione nei diversi posti dello spettro.*

Pensiamo infatti alla curva che rappresenta gli assorbimenti k in funzione del numero n di vibrazioni della luce incidente. L' assorbimento dipenderà, oltre che da n, da alcuni parametri caratteristici del mezzo $p_1\, p_2 \dots p_m$, il numero dei quali lascerò, per maggior generalità, indeterminato.

Ammettiamo che dei medesimi parametri sia funzione l' indice di rifrazione i, cosicchè si possa scrivere

$$k = \varphi(n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \tag{2}$$

$$i = \psi(n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \tag{3}$$

Si faccia subire al mezzo una particolare modificazione (per esempio l' azione di un campo magnetico) sul meccanismo della quale non è necessario precisar nulla; ed essa sia tale che la curva rappresentante gli assorbimenti di un raggio circolare sia identica a quella di prima, solo che sia spostata di una certa quantità δ nel senso delle n, per esempio, crescenti; cosicchè si abbia indicando con $p'_1\, p'_2\, p'_3 \dots p'_m$ i parametri del mezzo modificato

$$k = \varphi(n\,, p_1\, p_2 \dots p_m) = \varphi(n - \delta\,, p'_1\, p'_2 \dots p'_m)\,.$$

Anche la curva rappresentante gli indici si sposterà di una quantità eguale, *senza deformarsi.*

E infatti deriviamo successivamente la (2) m volte rispetto ad n, avremo

$$\begin{aligned} k' &= \varphi'_n\ (n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \\ k'' &= \varphi''_n\ (n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ k^{(m)} &= \varphi^{(m)}_n\ (n\, p_1\, p_2 \dots p_m) \end{aligned}$$

Se combiniamo queste m equazioni con le (2) e (3) potremo eliminare i parametri $p_1\, p_2 \dots p_m$ e la variabile n; otterremo così una equazione contenente i, k e le sue m derivate successive rispetto ad n, in modo che, risolvendola rispetto a i, si avrà

$$i = \mathrm{F}[k\,, k'\,, k''\,, \dots k^{(m)}]\,.$$

Questa relazione generalissima lega, in modo unico, per tutti i mezzi e per tutti i posti dello spettro, l' indice di rifrazione all' assorbimento e alle derivate successive di questo. Intanto la modificazione del mezzo primitivo è tale che, dopo di essa, la curva che dà le k si è soltanto spostata; e quindi ponendo $n - \delta$ al posto di n le k, k', k'', ecc., assumono gli stessi valori di prima. Risulta perciò evidente dall'ultima relazione che lo stesso avverrà per l'indice i.

Qualunque siano adunque le modificazioni che il magnetismo produce nel mezzo, le esperienze citate si possono semplicemente dedurre dal fenomeno Zeemann ammettendo che la curva di assorbimento per un raggio circolare sia all'infuori dello spostamento, identica a quella di prima; e che tanto l'indice di rifrazione che l'assorbimento di un mezzo dipendano dalle stesse costanti di questo, anzi, più rigorosamente, che tra le costanti che determinano l'assorbimento ci siano comprese tutte quelle che determinano l'indice di rifrazione.

2. La discussione della formola (1) può dare altri interessanti risultati, tenendo conto delle ipotesi che formano la base della teoria della dispersione anomala di Helmholtz. È noto [1] che in questa teoria si deducono per gli spostamenti delle particelle luminose delle espressioni le quali rivelano che il movimento corrisponde a quello di un'onda progressivamente smorzata. Perchè le espressioni ottenute soddisfino alle equazioni differenziali del moto luminoso, si debbono verificare alcune condizioni tra le costanti del mezzo. Si deduce così che, se la luce incidente ha un numero n di vibrazioni poco diverso da quello ν di massimo assorbimento, in modo che si possa scrivere

$$n = \nu + \frac{\varepsilon}{2}$$

essendo ε una quantità assai piccola, si deve avere

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{K}\left[\mu - \frac{P^2}{\nu^3}\frac{\mu\varepsilon}{\mu^2\varepsilon^2 + R^2}\right]$$

ove c rappresenta la velocità di propagazione della luce nel mezzo, K la costante di elasticità dell'etere, μ la densità delle particelle materiali che piglian parte al moto luminoso, P la costante di proporzionalità dell'azione reciproca tra le particelle di etere e quelle materiali allo spostamento relativo, R il coefficiente del termine esprimente l'attrito risentito dalle particelle materiali. Si ha infine per il numero di vibrazioni cui corrisponde il massimo assorbimento

$$\nu = \frac{H + P}{\mu}$$

rappresentando H il coefficente del termine esprimente la forza che tende a riportare le particelle luminose alla loro posizione di riposo.

[1] Kirchhoff, Mathematische Optik, Leipzig, 1891, pag. 172.

Ponendo nella precedente, per brevità,

$$\sqrt{\frac{\mu}{k}}=\frac{1}{c_0}$$

estraendo la radice quadrata e tenendo presenti gli ordini di grandezza, in base alle ipotesi di Helmholtz, delle diverse quantità che vi compariscono, si ricava

$$(3)\qquad \frac{1}{c}=\frac{1}{c_0}\left[1-\frac{1}{2}\frac{P^2}{\nu^3}\frac{\mu\varepsilon}{\mu^2\varepsilon^2+R^2}\right].$$

Ora se V_0 indica la velocità della luce nel vuoto e n l'indice di rifrazione si ha

$$n=\frac{V_0}{c}$$

da cui

$$\frac{dn}{d\lambda}=V_0\frac{d\frac{1}{c}}{d\lambda}=V_0\frac{d\frac{1}{c}}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{d\lambda}$$

d'altra parte

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda}=-2\frac{V_0}{\lambda^2}$$

quindi

$$\frac{dn}{d\lambda}=-2\frac{V_0^2}{\lambda^2}\frac{d\frac{1}{c}}{d\varepsilon}$$

Si ricava intanto dalla (3)

$$\frac{d\frac{1}{c}}{d\varepsilon}=-\frac{1}{2}\frac{P^2}{\nu^3 c_0}\frac{R^2-\mu^2\varepsilon^2}{(R^2+\mu^2\varepsilon^2)^2}.$$

Sostituendo nella (1) si ha finalmente per la rotazione

$$\varrho=-A\frac{2\pi}{V_0}\frac{P^2 l}{c_0}\frac{R^2-\mu^2\varepsilon^2}{(R^2+\mu^2\varepsilon^2)^2}H.$$

Si ritrova così il risultato sperimentale che il fenomeno è perfettamente simmetrico attorno alla banda, poichè ε comparisce con esponente pari e quindi dai due lati della banda, e a egual distanza da questa, cioè per due valori di ε eguali e di segno contrario, si avranno rotazioni eguali.

3. Considerazioni di simil genere si possono fare per venire alla spiegazione della doppia rifrazione dei vapori assorbenti normalmente alle linee di forza, scoperta dal Voigt.

Anche qui si può prender le mosse del fenomeno di Zeemann; esso ci apprende che se sulla fiamma si fa cadere un fascio di luce polarizzata perpendicolarmente alle linee di forza, si ha una riga di assorbimento identica alla primitiva; invece si hanno due righe di assorbimento spostate simmetricamente dai due lati della primitiva, se la luce è polarizzata nel senso delle linee di forza. Si ha allora

$$V = \psi(n) \tag{4}$$

la curva che rappresenta, a campo non eccitato, la velocità di propagazione della luce nel mezzo in funzione del numero di vibrazioni. Per la luce polarizzata normalmente alle linee di forza avremo, quando si chiude la corrente, la stessa curva di assorbimento e quindi, per la ipotesi sopra enunciata, la stessa curva per gli indici; cosicchè indicando con V_1 la velocità della luce in questo caso, sarà

$$V_1 = \psi(n) .$$

Invece, per la luce polarizzata nel senso delle linee di forza si modificheranno tanto la curva degli assorbimenti che quella delle velocità V_2; poniamo

$$V_2 = \varphi(n) .$$

Quest' ultima curva avrà una forma dipendente dallo spostamento δ delle righe dovuto all' effetto Zeemann, cioè si potrà scrivere

$$V_2 = \varphi(n , \delta) .$$

Sviluppiamo quest' ultima funzione in serie di Maclaurin rispetto a δ; avremo

$$V_2 = \varphi(n , 0) + \delta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta}\right]_{\delta=0} + \frac{1}{2} \delta^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2}\right]_{\delta=0} + \cdots . \tag{5}$$

Intanto questa funzione, per $\delta = 0$, cioè quando il campo è nullo, deve essere identica alla (4), cosicchè si deve avere

$$\varphi(n , 0) = \psi(n) .$$

Ne viene che φ (n , δ) dovrà essere della forma

$$\varphi(n , \delta) = \psi(n) + \delta \varphi_1(n , \delta)$$

e che la (5) diventa

$$V_2 = \psi(n) + \delta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \delta}\right]_{\delta=0} + \frac{1}{2} \partial^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2}\right]_{\delta=0} + \cdots .$$

Si vede così che i due raggi polarizzati ortogonalmente si propagheranno con velocità diverse V_1, V_2. Cosicchè se la luce incidente non è polarizzata in uno di questi due azimut principali (parallelamente o normalmente alle linee di forza), si manifesteranno fenomeni di doppia rifrazione. Anche questi sono quindi conseguenza necessaria del fenomeno di Zeemann.