# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME VIII.**

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

## Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 19 marzo 1899.*

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.


## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari.* Nota di G. FANO, presentata dal Socio CREMONA.

1. Nella mia Nota: *Sulle equazioni differenziali lineari che appartengono alla stessa specie delle loro aggiunte* (¹) ho dimostrato, fra altro, che se $G(y)=0$ e $G'(z)=0$ sono due equazioni differenziali lineari di ordine $n$ mutuamente aggiunte, e il gruppo di razionalità di $G(y)=0$ si compone di sostituzioni lineari trasformanti in sè stessa una forma quadratica $\varphi$ a coefficienti costanti e di discriminante non nullo, l'equazione $G'(z)=0$ potrà trasformarsi nella stessa $G(y)=0$ con una sostituzione

$$y=a_0z+a_1z'+\cdots+a_{n-1}\,z^{(n-1)}$$

dove le $a$ sono funzioni della variabile indipendente $x$ appartenenti al campo di razionalità definito dai coefficienti delle due equazioni proposte (e loro derivate) (²). E anzi, se l'equazione differenziale $G(y)=0$ ha rispetto alla forma $\varphi$ il rango $r\left(\geq 0\,,\ \leq\dfrac{n-1}{2}\right)$; vale a dire se, indicate con $y_1, y_2, \ldots y_n$ altrettante soluzioni distinte, opportunamente scelte, dell'equazione stessa, si ha identicamente $\varphi(y)=\varphi(y')=\cdots=\varphi(y^{(r-1)})=0$, ma $\varphi(y^{(r)})\neq 0$,

(¹) Atti della R. Acc. di Torino, seduta del 26 febbraio 1899.

(²) Questa relazione fra le equazioni differenziali $G(x)=0$ e $G'(z)=0$ è anche reciproca; e queste due equazioni appartengono allora *alla stessa specie*.

l' equazione $G'(z)=0$ potrà trasformarsi nella $G(y)=0$ con una sostituzione:

$$y = A(z) = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_{n-2r-1}\, z^{(n-2r-1)}$$

nella quale $a_{n-2r-1} \neq 0$.

È chiaro poi che, per $k \geq r$, le funzioni $\varphi(y^{(k)})$, benchè non identicamente nulle, saranno tuttavia razionalmente note; e ciò avverrà in particolare per la stessa $\varphi(y)$ ove sia $r=0$ (e si scelgano in modo opportuno le soluzioni $y_i$).

Questa stessa proposizione si trova sostanzialmente enunciata (benchè non dimostrata) nella Nota di Halphen: *Sur les formes quadratiques dans la théorie des équations différentielles linéaires* (1). La condizione che la forma $\varphi$ sia invariante rispetto a tutte le sostituzioni del gruppo di razionalità della data equazione non è da lui introdotta esplicitamente, ma può ritenersi tacitamente presupposta, poichè questa invarianza *formale* è conseguenza necessaria dell'essere $\varphi(y)$ razionalmente nota (2), o in particolare identicamente nulla (3), ogni qualvolta quest'ultima proprietà non sussista anche per altre forme quadratiche nelle soluzioni $y_i$. Però Halphen non fa alcun cenno della condizione che il discriminante della forma $\varphi$ debba essere diverso da zero; condizione che a me è risultata invece essenziale, almeno finchè non si impongano a quel gruppo di razionalità delle condizioni ulteriori, tali da rendere invariante rispetto ad esso, oltre alla forma polare di $\varphi$, anche un'altra forma bilineare, di determinante non nullo. Credo perciò opportuno mostrare donde proviene questa apparente contradizione.

2. E comincio col richiamare un caso particolare di questa proposizione, considerato dallo stesso Halphen nella Memoria: *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (4), e per il quale egli ha anche determinata la corrispondente sostituzione $y = A(z)$. Si tratta del caso $n=4$, $r=1$, ossia di un'equazione differenziale lineare di 4° ordine, di cui quattro soluzioni distinte sono legate da una relazione quadratica omogenea a coefficienti costanti. Se questa relazione ha il discriminante nullo, essa può ridursi a contenere tre sole delle quattro soluzioni $y_i$, e può assumere quindi la forma:

$$y_1 y_3 - y_2^2 = 0.$$

L'equazione differenziale di 4° ordine $G(y)=0$ ammetterà allora tutte le soluzioni $C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ di una certa equazione differenziale lineare

(1) Compt. Rend. de l'Ac. d. sc., t. CI (1885); p. 664-66.

(2) Ossia, nel linguaggio usato da Halphen, eguale a una nota funzione della variabile indipendente $x$.

(3) In questo caso però la forma $\varphi(y)$ sarebbe soltanto invariante a meno di una costante moltiplicativa.

(4) Acta math., vol. III (1883); p. 349 e seg.

di 3° ordine, che si potrà formare razionalmente, e che a sua volta dovrà essere soddisfatta dai quadrati di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale lineare di 2° ordine (e inversamente). Se quest'ultima equazione la supponiamo ridotta alla forma:

$$y'' + py = 0$$

quell'equazione differenziale di 3° ordine sarà:

$$y''' + 4py' + 2p'y = 0; \tag{1}$$

e l'equazione lineare più generale di 4° ordine che ammette tutte le soluzioni di quest'ultima equazione avrà allora la forma [1]:

$$(y' + qy)(y''' + 4py' + 2p'y) = 0$$

dove le espressioni fra parentesi devono considerarsi come simboli di operazioni (delle quali la prima è da eseguirsi sul risultato della seconda); quindi, per disteso:

$$y^{\text{IV}} + qy''' + 4py'' + (6p' + 4pq)\,y' + 2(p'' + p'q)\,y = 0. \tag{2}$$

L'equazione aggiunta di questa è:

$$z^{\text{IV}} - qz''' + (4p - 3q')z'' - (3q'' - 2p' + 4pq)z' - (q''' + 4pq' + 2p'q)\,z = 0. \tag{2'}$$

Calcolando pertanto per quest'ultima equazione la sostituzione con cui Halphen afferma ch'essa si trasforma nella (2) (Mem. cit., p. 350), si trova:

$$y = qz - z'. \tag{3}$$

E la funzione $y$ così definita soddisfa bensì alla (2), ma soddisfa pure alla (1); essa non è quindi soluzione generale della (2), e la vera trasformata della (2') mediante la sostituzione (3) sarà pertanto la (1), e non già la (2). Ciò va d'accordo anche col fatto che la (2'), essendo aggiunta della (2), e potendo perciò rappresentarsi simbolicamente col prodotto:

$$(z''' + 4pz' + 2p'z)(z' - qz) = 0$$ [2]

deve ammettere la soluzione (unica, a meno di una costante arbitraria moltiplicativa) dell'equazione differenziale di primo ordine $z' - qz = 0$, e deve

(1) Cfr. ad es. Schlesinger: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, vol. I, p. 45-46.

(2) Cfr. ad es. Schlesinger, op. e vol. cit., p. 59. Questi due fattori sono rispett. gli aggiunti (cambiati di segno e) in ordine invertito dei due con cui si compone il primo membro della (2). In particolare la forma di differenziale $y''' + 4py' + 2p'y$ coincide (a meno del segno) colla propria aggiunta.

quindi trasformarsi colla sostituzione (3) in un'equazione differenziale di ordine inferiore al proprio di un'unità [1].

In questo caso dunque l'equazione $G'(z)=0$ aggiunta di $G(y)=0$ si trasforma non già nella stessa $G(y)=0$, ma in un'equazione di ordine inferiore (con coefficienti appartenenti allo stesso campo di razionalità), della quale $G(y)=0$ ammette tutte le soluzioni; si trasforma cioè (come potremo dire brevemente) in un *divisore razionale* di $G(y)=0$. È in questo senso pertanto che deve intendersi la proposizione già enunciata da Halphen (e da lui anche dimostrata per $n=4$), nel caso in cui la forma $\varphi$ abbia il discriminante nullo; sussiste cioè il teorema:

*Se un'equazione differenziale lineare di ordine $n$ è tale che sia formalmente invariante rispetto alle operazioni del suo gruppo di razionalità, e perciò anche razionalmente nota, una forma quadratica $\varphi(y)$, a coefficienti costanti, fra $n$ sue soluzioni distinte; e si indica con $r\left(0\leq r\leq\frac{n-1}{2}\right)$ il rango di essa rispetto a questa forma, l'equazione aggiunta di essa si trasformerà con una sostituzione razionale:*

$$y=a_0z+a_1z'+\cdots+a_{n-2r-1}\,z^{(n-2r-1)}$$

*in un divisore razionale della stessa equazione proposta, di ordine eguale alla caratteristica del discriminante della forma $\varphi$*; e quindi nella stessa equazione proposta, se questo discriminante non è nullo.

Infatti, se il discriminante di $\varphi$ ha la caratteristica $m$ ($\leq n$; e $>2$, non potendo $\varphi$ spezzarsi nel prodotto di due forme lineari), noi potremo ridurre la forma stessa, con un'opportuna sostituzione lineare, a contenere soltanto $m$ variabili (rispetto alle quali il suo discriminante sarà diverso da zero); e potremo allora scegliere le $n$ soluzioni distinte $y_i$ dell'equazione proposta $G(y)=0$ in modo che $m$ fra queste, ad es. le $y_1, y_2 \dots y_m$, e le loro derivate di uno stesso ordine, rendano $\varphi$ razionalmente nota, e eventualmente nulla. Il sistema lineare di soluzioni $C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_my_m$ sarà allora invariante rispetto a tutte le sostituzioni del gruppo di razionalità dell'equazione proposta; e queste stesse soluzioni dovranno perciò soddisfare a un'equazione differenziale lineare di ordine $m$, $Q(y)=0$, i cui coefficienti apparterranno ancora allo stesso campo di razionalità. La forma differenziale $G(y)$ si potrà quindi rappresentare simbolicamente con un prodotto:

$$G(y)=PQ(y)$$

essendo P un'opportuna forma differenziale lineare di ordine $n-m$, a coefficienti pure razionalmente noti. E se con $G'$, $P'$, $Q'$ indichiamo le forme differenziali aggiunte rispett. di $G$, $P$, $Q$, avremo altresì:

$$G'(z)=Q'P'(z).$$

[1] Schlesinger: op. cit., vol. II, p. 114.

Ora, il gruppo di razionalità dell'equazione differenziale $Q(y) = 0$ non è altro che l'insieme delle sostituzioni determinate sulle $y_1, y_2, \dots y_m$ dal gruppo di razionalità di $G(y) = 0$; e poichè queste sostituzioni lasciano invariata (formalmente) la $\varphi(y_1 \dots y_m)$ (che, come forma ad $m$ variabili, ha il discriminante non nullo), così l'equazione $Q'(z) = 0$ aggiunta di $Q(y) = 0$ dovrà potersi trasformare in quest'ultima (in forza del risultato già ottenuto nella mia Nota cit.) con una sostituzione $y = A(z)$, nella quale le derivate di $z$ compariranno soltanto fino all'ordine $m - 2r - 1$ incluso, se con $r$ indichiamo il rango di $G(y) = 0$, e quindi anche di $Q(y) = 0$, rispetto alla forma $\varphi$. E siccome d'altra parte la sostituzione $\bar{z} = P'(z)$ trasforma evidentemente l'equazione $G'(z) = 0$, nella $Q'(\bar{z}) = 0$; così, mediante il prodotto di queste due operazioni, ossia ponendo:

$$y = AP'(z)$$

dove le derivate di $z$ compariranno fino all'ordine $(m - 2r - 1) + (n - m) = n - 2r - 1$ incluso, noi potremo trasformare l'equazione $G'(z) = 0$, aggiunta di $G(y) = 0$, non già in quest'ultima equazione, ma nel suo divisore razionale di ordine $m, Q(y) = 0$.

Quest'equazione $Q(y) = 0$ appartiene anzi alla stessa specie della propria aggiunta (secondo la definizione contenuta nella mia Nota cit.): non così però la $G(y) = 0$.

3. Un ragionamento completamente analogo permette di concludere che *se un'equazione differenziale lineare di ordine $n$ è tale che sia formalmente invariante rispetto alle operazioni del suo gruppo di razionalità, e perciò anche razionalmente nota, una forma bilineare alternante a coefficienti costanti fra $n$ sue soluzioni distinte $y_i$ e le loro derivate prime, e si indica pure con $r$ il rango dell'equazione differenziale proposta rispetto a questa forma* (1), *l'equazione aggiunta della proposta si trasformerà con una sostituzione razionale*:

$$y = a_0 z + a_1 z' + \cdots + a_{n-2r-2}\, z^{(n-2r-2)}$$

(dove $a_{n-2r-2} \neq 0$) *in un divisore razionale di quest'ultima equazione, di ordine eguale alla caratteristica* (che è certo numero pari) *del determinante della forma alternante considerata.*

La dimostrazione è fondata anche qui sulla proprietà di questa forma alternante di potersi trasformare linearmente in un'altra di determinante non nullo, nella quale le variabili di ciascuna serie siano in numero eguale alla

(1) Se si suppone cioè che questa forma alternante si annulli identicamente quando in luogo delle $y_i$ e loro derivate prime si introducono rispett. le derivate $y_i^{(k)}$ e $y_i^{(k+1)}$ per $k < r$; e non si annulli invece quando vi si introducono le $y_i^{(r)}$ e $y_i^{(r+1)}$.

caratteristica del determinante primitivo (e risultino altresì affette dai medesimi indici). In linguaggio geometrico, si tratta semplicemente della proprietà di una quadrica o di un complesso lineare di uno spazio $S_{n-1}$, i quali siano $n-m$ volte degeneri, di potersi ottenere come proiezioni di varietà omonime non degeneri di uno spazio $S_{m-1}$ da uno spazio $S_{n-m-1}$ (asse) non incidente a quest' ultimo.

Questi due teoremi non sono però invertibili; perchè se l' equazione $G'(z)=0$ aggiunta di $G(y)=0$ si trasforma con una sostituzione razionale $y=A(z)$ in un divisore razionale $Q(y)=0$ della stessa $G(y)=0$, questo non basta nemmeno per concludere che l' equazione differenziale $Q(y)=0$ appartenga alla stessa specie della propria aggiunta, e si possano perciò applicare a quest' ultima equazione i risultati della mia Nota cit.

Sia infatti $S(y)=0$ un' equazione differenziale dello stesso ordine $m$ di $Q(y)=0$, e tale che la sua aggiunta $S'(z)=0$ appartenga alla stessa specie di $Q(y)=0$, e si trasformi perciò in quest' ultima con una sostituzione razionale $y=A(z)$. Formiamo l' equazione differenziale lineare $G(y)=0$ di ordine $2m$ che ammette tutte le soluzioni delle due equazioni $Q(y)=0$ e $S(y)=0$ (e che ha perciò per integrale generale la somma degli integrali generali di queste due equazioni). Avremo allora:

$$G(y) \equiv PQ(y) \equiv RS(y)$$

essendo P e R opportune forme differenziali di ordine $m$. E passando alle forme aggiunte:

$$G'(z) \equiv Q'P'(z) \equiv S'R'(z).$$

E poichè la sostituzione $y=A(z)$ trasforma $S'(z)=0$ in $Q(y)=0$, così la sostituzione $y=AR'(z)$ dovrà trasformare $G'(z)=0$ nella stessa $Q(y)=0$; e ciò senza che su quest' ultima equazione si sia fatta alcuna ipotesi particolare.

Si può domandare infine se un teorema analogo ai precedenti non sussista anche per il caso in cui le sostituzioni del gruppo di razionalità dell' equazione differenziale proposta trasformino in sè stessa una forma bilineare non simmetrica nè alternante, il cui determinante abbia una caratteristica $m<n$. Ma la risposta è negativa.

Infatti, se la forma bilineare $\sum c_{ik}\xi_i\eta_k$, il cui determinante supporremo avere la caratteristica $m<n$, è simmetrica o alternante, i due sistemi lineari di dimensione $m-1$ determinati rispettivamente dalle forme $\sum_i c_{ik}\varrho_i$ e $\sum_k c_{ik}\varrho_k$ (dove, per maggior chiarezza, indichiamo le variabili con una nuova lettera $\varrho$) coincidono; mentre invece negli altri casi questi stessi sistemi lineari, pur potendo coincidere, sono in generale distinti. In ogni caso poi questi due sistemi lineari sono legati invariantivamente alla forma bilineare proposta. Da ciò si trae che, applicando alle due

serie di variabili $\xi_i$ e $\eta_i$ una medesima sostituzione lineare, noi potremo bensì trasformare quest' ultima forma in un' altra contenente soltanto $m$ delle nuove variabili $\bar{\xi}$ e altrettante delle $\bar{\eta}$, e avente rispetto a queste il determinante (di ordine $m$) non nullo; ma queste $\bar{\xi}$ e $\bar{\eta}$ non saranno affette in generale — ove la forma non sia simmetrica nè alternante — dai medesimi $m$ indici; e noi non potremo perciò considerare la nuova forma come invariante rispetto a un gruppo di sostituzioni lineari, quale ad es. il gruppo di razionalità di un' equazione differenziale lineare, nè introdurre in essa le soluzioni $y_i$ di quest' equazione e le loro derivate, se non considerando la forma stessa come tale rispetto a due serie di un numero $> m$ di variabili (in modo da comprendere tutti gli indici). E allora il suo determinante sarà ancora nullo, e non si potranno perciò applicare le considerazioni analoghe a quelle del n. 2.

A chi ha famigliarità con considerazioni geometriche, basterà d' altronde ch' io ricordi che una reciprocità di uno spazio $S_{n-1}$ il cui determinante abbia la caratteristica $m \leq n-1$ si riduce a una reciprocità non degenere tra due forme fondamentali di spazî aventi per sostegni rispettivi due $S_{n-m-1}$. Questi due spazî coincidono certo se la reciprocità è involutoria; ma negli altri casi sono in generale distinti; e soltanto quando essi coincidano, alla considerazione della reciprocità proposta si può sostituire (come a noi occorre, volendo estendere il teorema del n° 2) quella di un' analoga corrispondenza non degenere *in* uno spazio inferiore.

## Matematica. — *Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni.* Nota del dott. P. Medolaghi, presentata dal Socio Cerruti.

Alcune antiche ricerche di Engel ed altre più recenti di Picard hanno mostrato la corrispondenza che c' è tra i gruppi finiti ed infiniti e certi speciali gruppi finiti.

Io mi ero proposto già da qualche tempo di adoperare questa corrispondenza come mezzo di ricerca nel problema della determinazione di tutti i gruppi di uno spazio ad $n$ dimensioni. Presto mi accorsi che il metodo non avrebbe avuto che le apparenze della novità: in sostanza esso coincide col metodo basato sugli sviluppi in serie dei coefficienti delle trasformazioni infinitesime nell' intorno di un punto generico; ma *soltanto nella supposizione che le trasformazioni di ordine zero siano permutabili*, cioè riducibili alla forma: $p_1, \dots p_n$.

Le considerazioni raccolte in questa Nota, mentre spiegano la ragione di tale differenza in due metodi egualmente generali, mostrano che in realtà