# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

I zanzaroni in certe località presentano spesso le spore, di cui si parla nella Nota.

Nelle uova molto sviluppate di alcuni zanzaroni abbiamo trovato numerosissimi corpi, che potrebbero interpretarsi come spore degli Emosporidi umani.

Abbiamo ottenuto un altro caso di terzana comune colle punture di soli sette zanzaroni.

**Matematica.** — *Sulla convergenza delle frazioni continue algebriche.* Nota del dott. ETTORE BORTOLOTTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Se indichiamo con $x$ il punto generico di un insieme infinito ed ordinato $\Gamma$, e rappresentiamo con $t = \varrho e^{i\theta}$ un punto qualunque, del piano della variabile complessa, essendo date $n+1$ funzioni arbitrarie:

$$a_{0,x}(t)\,,\; a_{1,x}(t)\,, \dots ,\; a_{n,x}(t)\,,$$

delle due variabili $x$, $t$, dalla forma lineare alle differenze:

$$\mathrm{A}(y) = a_{0,x}(t) y_{x+n} + a_{1,x}(t) y_{x+n-1} + \cdots + a_{n,x}(t) y_x\,,$$

si possono imaginare generate infinite specie di algoritmi di cui, nel caso di forme del 2° ordine, il più semplice ed importante è quello delle frazioni continue.

Le condizioni di convergenza di quegli algoritmi sono ancora poco note; il solo ad occuparsene, e per certi speciali algoritmi detti « *generalizzati delle frazioni continue* », fu il prof. Pincherle (¹) il quale peraltro ha sempre ammesso che, in ogni punto $t$, di un determinato intorno, convergano regolarmente verso limiti unici, le successioni:

$$a_{s,0}(t)\,,\; a_{s,1}(t)\,,\; a_{s,2}(t)\,,\; \dots$$
$$(s = 0\,, 1\,, \dots n)$$

Per gli algoritmi periodici, a mo' d' esempio, non si saprebbe applicare alcun criterio di convergenza, e nemmeno si saprebbe rispondere alla domanda: *se la frazione continua algebrica* PERIODICA:

$$a_0(t) + \cfrac{b_1(t)}{a_1(t) + \cfrac{b_2(t)}{a_2(t) + \cdots}}$$

*possa, in qualche caso, definire una funzione analitica della t.*

(¹) Sarebbe troppo lungo ricordare tutti gli importanti lavori del Pincherle su questo argomento; citerò, p. es.: *Contributo alla generalizzazione delle frazioni continue* (Mem. Acc. di Bologna, a. 1894).

Poichè gli algoritmi periodici sono particolarmente importanti per la rappresentazione approssimata delle funzioni algebriche [1], così mi sono occupato di stabilire delle condizioni sufficienti per la loro convergenza, ed ho brevemente esposto il metodo ed i principali risultamenti, in una nota che è in corso di stampa. Qui tratterò, con maggior larghezza, il caso più semplice ed ovvio delle frazioni continue; ma il ragionamento sarà condotto per modo che risulti manifesta la possibilità della generalizzazione ad algoritmi di ordine superiore.

1. Sia la forma alle differenze

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A}(y) = y_{x+2} + a_x y_{x+1} + b_x y_x ,$$

e sia $\varphi_x$ un suo integrale. Si avrà identicamente:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\varphi_{x+2}}{\varphi_{x+1}} = a_x + b_x \frac{\varphi_x}{\varphi_{x+1}} .$$

Se, in un determinato punto $x_0$, sono soddisfatte le condizioni:

$$\text{(3)} \qquad \left|\frac{\varphi_{x_0+1}}{\varphi_{x_0}}\right| > 1$$

$$\text{(4)} \qquad |a_{x_0}| > |b_{x_0}| + 1 + \eta ,$$

con $\eta$ quantità positiva, sarà ancora:

$$\text{(5)} \qquad |a_{x_0}| + |b_{x_0}| > \left|\frac{\varphi_{x_0+2}}{\varphi_{x_0+1}}\right| > 1 + \eta .$$

Se poi, la condizione espressa dalla (4), è soddisfatta in tutti i punti dell' insieme ordinato $\boldsymbol{\Gamma}$, che vengono dopo $x_0$, si avrà costantemente:

$$\left|\frac{\varphi_{x+1}}{\varphi_x}\right| > 1 + \eta ,$$

e *la successione dei valori assoluti che la $\varphi$ prende nei punti del campo $\boldsymbol{\Gamma}$, tenderà all' infinito sempre crescendo.*

2. Sieno ora $a_x$, $b_x$, funzioni razionali ed intere della variabile complessa $t$:

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} a_x = a_{0,x}\, t^r + a_{1,x}\, t^{r-1} + \cdots + a_r \\ b_x = b_{1,x}\, t^{r-1} + b_{2,x}\, t^{r-2} + \cdots + b_r , \end{cases}$$

supponiamo inoltre che $a_{0,x}$ sia sempre diversa dallo zero e, che così, il grado di $a_x(t)$ sia superiore a quello di $b_x(t)$.

[1] Cfr. *Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche periodiche* (Rend. Circolo Mat. di Palermo, tomo VI); *Un contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze*, § V (Annali di Mat. 1895).

La condizione (4) prenderà la forma:

$$|a_{0,x}\, t^r + \cdots + a_{r,x}| > |b_{1,x}\, t^{r-1} + \cdots + b_{r,n}| + 1 + \eta\,,$$

e sarà certamente soddisfatta se:

$$|a_{0,x}|\,\varrho^r > |a_{1,x} + b_{1,x}|\,\varrho^{r-1} + \cdots + |a_{r,x} + b_{r,x}| + 1 + \eta\,. \tag{8}$$

Poniamo che esista, diverso dallo zero, il limite inferiore $\alpha$ delle $|a_{0,x}|$, ed esistano anche, finiti e determinati, i limiti superiori $A_0, A_1, \dots A_r$, dei moduli: $|a_{0,x}|, |a_{1,x} + b_{1,x}|, \dots, |a_{r,x} + b_{r,x}|$.

La condizione (8) sarà, a più forte ragione, soddisfatta se:

$$\alpha\varrho^r > A_1\varrho^{r-1} + \cdots + A_r + 1 + \eta\,.$$

Quest' ultima però è certamente soddisfatta per tutti i punti $t = \varrho e^{i\theta}$, che sono esterni al cerchio $(R_1)$, dove sono racchiuse tutte le radici della equazione, a coefficienti reali:

$$\alpha\varrho^r - A_1\varrho^{r-1} - \dots - A_r - 1 - \eta = 0\,; \tag{9}$$

ed allora per tutti i punti situati fuori di questo cerchio, o sulla circonferenza, si avrà la limitazione:

$$A_0\varrho^r + A_1\varrho^{r-1} + \dots + A_r > \left|\frac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > 1 + \eta\,.$$

Cioè: *Se $\varphi_x(t)$ è un integrale della $A(y)$ che in due punti consecutivi $x_0$, $x_0 + 1$, dell'insieme $\Gamma$, e per un determinato valore $t_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$, assume valori crescenti, in modulo,*

$$|\varphi_{x_0+1}(t_0)| > |\varphi_x(t_0)|\,,$$

*la successione:*

$$|\varphi_x(t)|, |\varphi_{x+1}(t)|, |\varphi_{x+2}(t)|, \dots$$

*tende all' infinito, sempre crescendo, per ogni punto $t$ situato fuori di un cerchio $(R_1)$ che contenga nel suo interno il punto $t_0$ e tutte le radici della equazione numerica* (9).

In particolare: *Nessuna delle funzioni $\varphi_{x_0}(t)$, $\varphi_{x_0+1}(t)$, ... può aver radici situate fuori del cerchio $(R_1)$.*

3. È facile determinare anche un cerchio $(R_\mu)$ tale che, per tutti i punti situati fuori di questo cerchio, o sulla sua circonferenza, sia:

$$\left|\frac{a_x}{b_x}\right| > \mu\,,$$

in qualunque modo il numero positivo $\mu$ sia stato scelto.

Basterà infatti determinare un limite superiore dei moduli delle radici della equazione numerica:

$$\begin{cases} \alpha\varrho^r - B_1\varrho^{r-1} - \cdots - B_r = 0 \\ B_s = \text{lim sup. di } |a_{s,x} + \mu b_{s,x}|\,, \end{cases}$$

per avere il raggio di quel cerchio.

È chiaro altresì che, fuori del cerchio che contiene tutte le radici della equazione numerica:

$$\alpha\varrho^r - A_1\varrho^{r-1} - \dots - A_r - \mu = 0\,,$$

si ha costantemente

$$\left|\frac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > \mu\,. \tag{11}$$

Prendendo quello dei due cerchi che ha maggior raggio e chiamandolo ancora $(R_\mu)$ avremo che: *fuori di un tale cerchio, e sulla sua circonferenza, sono costantemente soddisfatte le due relazioni*:

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{a_x(t)}{b_x(t)}\right| > \mu \\ &\left|\frac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > \mu \end{aligned}\right. \tag{12}$$

4. Mantenendo, per i coefficienti della $A(y)$ e per il suo integrale $\varphi_x(t)$, le condizioni ammesse nei numeri precedenti, indichiamo ora con $\psi_x(t)$ un altro integrale della $A(y)$, del quale ammetteremo soltanto che *le sue espressioni, che potremo chiamare iniziali,* $\psi_{x_0}(t)$, $\psi_{x_0+1}(t)$, sieno tali che *esista un limite superiore finito* M *per i valori assoluti della differenza finita*:

$$\left|\Delta\frac{\psi_{x_0}(t)}{\varphi_{x_0}(t)}\right| = \left|\frac{\psi_{x_0+1}(t)}{\varphi_{x_0+1}(t)} - \frac{\psi_{x_0}(t)}{\psi_{x_0}(t)}\right| \tag{13}$$

Dico che allora *la espressione* $\dfrac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}$, *per ogni punto t esterno ad un cerchio di raggio determinato, al crescere indefinito di x, tende ad un limite finito e determinato* $U(t)$; *e che questo è funzione analitica della t regolare fuori di quel cerchio.*

Ed infatti, si ha identicamente:

$$\frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} = \frac{\psi_{x_0}(t)}{\varphi_{x_0}(t)} + \sum_{n=1}^{x-x_0} u_n \tag{14}$$

$$u_n = \frac{\psi_{x_0+n}(t)}{\varphi_{x_0+n}(t)} - \frac{\psi_{x_0+n-1}(t)}{\varphi_{x_0+n-1}(t)}\,,$$

$$u_n = \frac{D_{x_0+n}}{\varphi_{x_0+n}(t)\,\varphi_{x_0+n-1}(t)}\,,\qquad D_{x_0+n} = \begin{vmatrix}\psi_{x_0+n} & \varphi_{x_0+n}\\ \psi_{x_0+n-1} & \varphi_{x_0+n-1}\end{vmatrix} \tag{15}$$

Facilmente si scorge che:

$$D_{x_0+n} = -\,b_{x_0+n-1}\,D_{x_0+n-1}\,; \tag{16}$$

e perciò:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = -\,b_{x_0+n-2}\cdot\frac{\varphi_{x_0+n-1}(t)}{\varphi_{x_0+n}(t)}\cdot\frac{\varphi_{x_0+n-2}(t)}{\varphi_{x_0+n-1}(t)}\,.$$

Siccome però:

$$\left|\frac{\varphi_{x+1}(t)}{\varphi_x(t)}\right| > |a_x| - |b_x| > 1 + \eta\,,$$

così avremo:

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < \frac{|b_{x_0+n-2}|}{|a_{x_0+n-2}| - |b_{x_0+n-2}|}\,; \tag{17}$$

e, fuori dal cerchio $(R_\mu)$, sarà

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < \frac{1}{\mu - 1}\,. \tag{18}$$

*Basta solo che sia* $\mu = 2 + \eta$ *per essere certi della convergenza della serie:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,,$$

*cioè della esistenza del limite*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)} = U(t)$$

*per ogni punto* $t$ *situato fuori del cerchio* $R_\mu$ *o sulla sua circonferenza.*

Dico inoltre che, *per i punti di una stessa circonferenza* $(R_\mu)$, *la frazione* $\dfrac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}$, *tende uniformemente al limite* $U(t)$.

Ed infatti:

$$\left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}\right| = \left|\sum_{n=x-x_0}^{\infty} \frac{D_{x_0+n}}{\varphi_{x_0+n}\,\varphi_{x_0+n-1}}\right| < \left|\frac{D_{x_0}}{\varphi_{x_0+1}\,\varphi_{x_0}}\right| \sum_{n=x-x_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu - 1}\right)^n,$$

cioè:

$$\left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}\right| < \left|\frac{D_{x_0}}{\varphi_{x_0+1}(t)\,\varphi_{x_0}(t)}\right| \frac{1}{\mu - 2}\left(\frac{1}{\mu - 1}\right)^{x-x_0-1}$$

Ma:

$$\left|\frac{D_{x_0}}{\varphi_{x_0+1}(t)\,\varphi_{x_0}(t)}\right| = \left|\frac{\psi_{x_0+1}(t)}{\varphi_{x_0+1}(t)} - \frac{\psi_{x_0}(t)}{\varphi_{x_0}(t)}\right| = \left| \Delta \frac{\psi_{x_0}}{\varphi_{x_0}}\right|;$$

e questa espressione ammette, per ipotesi, un limite superiore M per tutti i punti esterni ad $(R_1)$; dunque in fine:

$$\left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}\right| < M\,\frac{1}{\mu - 2}\cdot\left(\frac{1}{\mu - 1}\right)^{x-x_0-1}. \tag{19}$$

Si scorge di qui che, per ogni valor fissato di $\mu$, si può scegliere $x$ abbastanza grande perchè, in tutti i punti $t$, situati fuori del cerchio $(R_\mu)$, o sulla circonferenza, sia

$$\left| U(t) - \frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}\right| < \varepsilon$$

essendo $\varepsilon$ piccola a piacere.

Rimane così dimostrata la convergenza uniforme della $\frac{\psi_x(t)}{\varphi_x(t)}$ verso la $U(t)$ lungo ogni circonferenza $(R_\mu)$, se $\mu > 2$.

Per un noto teorema, dovuto a Weierstrass, potremo dunque concludere che $U(t)$ *è una funzione analitica di $t$ regolare fuori del cerchio* $(R_2)$.

5. Tutte le condizioni richieste per le $\varphi_x(t)$, $\psi_x(t)$ sono certamente soddisfatte dai numeratori e dai denominatori della ridotta di ordine $x$ nella frazione continua:

$$a_0(t) + \cfrac{b_1(t)}{a_1(t) + \cfrac{b_2(t)}{a_2(t) + \cdots}} \,. \tag{20}$$

*Quando dunque il grado di una qualunque della $a_x(t)$ non sia superato da quello della $b_x(t)$ corrispondente, ed esistano limiti superiori finiti per i valori assoluti delle somme dei coefficienti di potenze simili di $t$ nei due polinomi $a(t)$, $b(t)$; e, di più, i valori assoluti dei coefficienti della massima potenza di $t$ in $a_x(t)$, non abbiano limite inferiore nullo, si può asserire che la frazione continua* (20) *converge fuori di un cerchio di raggio determinato e rappresenta una funzione analitica della $t$, regolare fuori di quel cerchio.*

Si noti che l'esistenza di quei limiti superiori, ed inferiori finiti, è posta fuor d'ogni dubbio quando i coefficienti $a_{h,x}$, $b_{k,x}$ delle potenze di $t$ nei due polinomi $a_x(t)$, $b_x(t)$, non abbiano che un numero finito di valori diversi in tutto il campo $\Gamma$; così in particolare: *Una frazione continua periodica algebrica* (20) *è sicuramente convergente fuori di un dato cerchio, e definisce una funzione analitica, alla sola condizione che il grado di ogni $b_x(t)$ sia inferiore di quello della $a_x(t)$ corrispondente.*

Così *le frazioni continue, più spesso considerate* (1)

$$a_{0,0}t + a_{1,0} + \cfrac{b_1}{a_{1,0}t + a_{1,1} + \cfrac{b_2}{a_{2,0}t + a_{2,1} + \cdots}} \tag{21}$$

*nelle quali le $b_x$ sono supposte costanti rispetto a $t$, e le $a_x$ sono lineari nella $t$, convergono sicuramente fuori di un dato cerchio, quando sono periodiche.*

**Matematica.** — *Sulla rappresentazione approssimata di funzioni algebriche per mezzo di funzioni razionali.* Nota di E. Bortolotti, presentata dal Socio Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Possé, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, St Petersbourg 1886; Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen* (t. I, cap. V.).