ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

serie di variabili ξ_i e η_i una medesima sostituzione lineare, noi potremo bensì trasformare quest' ultima forma in un' altra contenente soltanto m delle nuove variabili $\overline{\xi}$ e altrettante delle $\overline{\eta}$, e avente rispetto a queste il determinante (di ordine m) non nullo; ma queste $\overline{\xi}$ e $\overline{\eta}$ non saranno affette in generale — ove la forma non sia simmetrica nè alternante — dai medesimi m indici; e noi non potremo perciò considerare la nuova forma come invariante rispetto a un gruppo di sostituzioni lineari, quale ad es. il gruppo di razionalità di un' equazione differenziale lineare, nè introdurre in essa le soluzioni y_i di quest' equazione e le loro derivate, se non considerando la forma stessa come tale rispetto a due serie di un numero $> m$ di variabili (in modo da comprendere tutti gli indici). E allora il suo determinante sarà ancora nullo, e non si potranno perciò applicare le considerazioni analoghe a quelle del n. 2.

A chi ha famigliarità con considerazioni geometriche, basterà d' altronde ch' io ricordi che una reciprocità di uno spazio S_{n-1} il cui determinante abbia la caratteristica $m \leq n-1$ si riduce a una reciprocità non degenere tra due forme fondamentali di spazî aventi per sostegni rispettivi due S_{n-m-1}. Questi due spazî coincidono certo se la reciprocità è involutoria; ma negli altri casi sono in generale distinti; e soltanto quando essi coincidano, alla considerazione della reciprocità proposta si può sostituire (come a noi occorre, volendo estendere il teorema del n° 2) quella di un' analoga corrispondenza non degenere *in* uno spazio inferiore.

Matematica. — *Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni.* Nota del dott. P. Medolaghi, presentata dal Socio Cerruti.

Alcune antiche ricerche di Engel ed altre più recenti di Picard hanno mostrato la corrispondenza che c' è tra i gruppi finiti ed infiniti e certi speciali gruppi finiti.

Io mi ero proposto già da qualche tempo di adoperare questa corrispondenza come mezzo di ricerca nel problema della determinazione di tutti i gruppi di uno spazio ad n dimensioni. Presto mi accorsi che il metodo non avrebbe avuto che le apparenze della novità: in sostanza esso coincide col metodo basato sugli sviluppi in serie dei coefficienti delle trasformazioni infinitesime nell' intorno di un punto generico; ma *soltanto nella supposizione che le trasformazioni di ordine zero siano permutabili*, cioè riducibili alla forma: $p_1, \ldots p_n$.

Le considerazioni raccolte in questa Nota, mentre spiegano la ragione di tale differenza in due metodi egualmente generali, mostrano che in realtà a rappresentare l' insieme dei gruppi transitivi bastano quei gruppi che contengono le traslazioni.

1. Se la trasformazione $y_i = y_i(x_1 \dots x_n)$, $i = 1 \dots n$, lascia invariante la espressione differenziale quadratica

$$\sum_{k,\nu}^{1\dots n} f_{k,\nu}(x_1 \dots x_n)\, dx_k\, dx_\nu \tag{1}$$

le funzioni y_i soddisfano alle condizioni:

$$f_{i,\lambda}(x_1 \dots x_n) = \sum_{k,\nu} f_{k,\nu}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\lambda} \qquad i, \lambda = 1 \dots n. \tag{2}$$

Secondo la natura delle funzioni $f_{i,\nu}$ il sistema può essere completamente integrabile, o avere nell' integrale generale meno di $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti, od anche ammettere la soluzione unica $y_i = x_i$; il supporre che sia completamente integrabile non basta a caratterizzare il gruppo dei movimenti, perchè è noto dai lavori di Lie sui fondamenti della geometria che questi movimenti sono riducibili a *due* diversi tipi: il gruppo dei movimenti euclidei:

$$p_k \quad , \quad x_\mu p_k - x_k p_\mu \quad k, \mu = 1 \dots n \tag{3}$$

e quello dei movimenti non euclidei:

$$p_k - x_k \sum_{\tau=1}^{n} x_\tau p_\tau \quad , \quad x_\mu p_k - x_k p_\mu \quad k, \mu = 1 \dots n. \tag{4}$$

Cercando d'altra parte la forma di Engel per le equazioni di definizione dei gruppi (3), (4), si trova che questa forma è *comune* ai due gruppi; essa è appunto la (2). Quì dunque le equazioni di definizione sotto la forma di Engel rappresentano due gruppi, uno dei quali contenente le traslazioni.

Sarebbe facile trovare altri casi consimili; mi limito ancora ad accennare il più caratteristico: quello dei gruppi transitivi ad n parametri nello spazio ad n dimensioni. Questi gruppi, che già per $n = 2$ appartengono a tipi diversi, hanno comuni le equazioni di definizione sotto la forma di Engel, la quale è:

$$\varphi_{k,i}(x_1, \dots x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{k,\nu}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \qquad k, i = 1 \dots n.$$

Prendendo p. es.

$$\varphi_{k,i} = 0 \ (k \neq i) \quad , \quad \varphi_{k,k} = 1.$$

si ha il gruppo delle traslazioni:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial y_k}{\partial x_k} = 1.$$

e disponendo opportunamente delle $\varphi_{k,i}$ si otterrebbero tutti gli altri.

2. Dimostrerò ora per ogni caso che le equazioni di definizione, quando vengono assunte sotto la forma di Engel, rappresentano in generale gruppi diversi, e che tra questi ve ne è sempre uno almeno che contiene come sottogruppo il gruppo delle traslazioni.

Consideriamo successivamente i sistemi:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{G} & \varpi_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \varpi_1(y), \dots \varpi_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\} \\
\mathrm{S} & \overline{\varpi}_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \varpi_1(y), \dots \varpi_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\} \\
\mathrm{S}^{-1} & \varpi_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\} \qquad k = 1 \dots m. \\
\boldsymbol{\Gamma} & \overline{\varpi}_k(x) = \mathrm{I}_k \left\{ \overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots \right\}
\end{array}$$

in cui $\varpi(y)$, $\overline{\varpi}(y)$ stanno per brevità in luogo di $\varpi(y_1 \dots y_n)$, $\overline{\varpi}(y_1 \dots y_n)$, e le ϖ, $\overline{\varpi}$ sono due sistemi di funzioni determinate in modo che ciascuno dei sistemi G, $\boldsymbol{\Gamma}$ sia completamente integrabile. Le G siano le equazioni di definizione di un gruppo G; allora anche $\boldsymbol{\Gamma}$ è un gruppo, ed S, S^{-1} sono due schiere. Le proprietà delle funzioni I_k permettono facilmente di stabilire che la trasformazione più generale della schiera S si ottiene facendo seguire ad una trasformazione particolare della schiera stessa la trasformazione più generale del gruppo G, e che la schiera S^{-1} si compone di tutte le trasformazioni inverse a quelle di S. Combinando queste due osservazioni si arriva al risultato che la schiera S si compone di tutte le trasformazioni che trasformano il gruppo G in $\boldsymbol{\Gamma}$. Condizione necessaria e sufficiente perchè i gruppi G e $\boldsymbol{\Gamma}$ siano simili è dunque la integrabilità del sistema S.

Grazie alla natura delle funzioni I_k, la condizione di integrabilità si può presentare sotto un aspetto invariantivo: consideriamo le $\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x)$ come funzioni del punto nella varietà $x_1 \dots x_n$ (come sarebbero p. es. le $\mathrm{E}(u, v)$, $\mathrm{F}(u, v)$, $\mathrm{G}(u, v)$ su una superficie di cui si conosce l'elemento lineare); le S possono allora considerarsi come le formole di trasformazione delle funzioni $\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x)$ per un cambiamento di coordinate. A queste formole si potranno aggiungere quelle che rappresentano le trasformazioni delle derivate prime, seconde, ... delle funzioni $\varpi_1 \dots \varpi_m$; e si determineranno quelle espressioni formate con le ϖ e le loro derivate che restano invarianti per ogni cambiamento di coordinate.

Sia:

$$\begin{array}{c}
\alpha_1 \left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial x_1}, \dots \right) \\
\dots\dots\dots\dots \\
\alpha_r \left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial x_1}, \dots \right)
\end{array}$$

il sistema completo di questi invarianti.

Per riconoscere se il sistema S, (od S^{-1}), è integrabile, bisognerà calcolare anche le espressioni:

$$\alpha_1\left(\overline{\varpi}(y), \dots \overline{\varpi}(y); \frac{\partial\overline{\varpi}_1}{\partial y_1}, \dots\right), \dots$$

e vedere poi se il sistema:

$$(5)\quad \begin{cases} \alpha_1\left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial\varpi_1}{\partial x_1}, \dots\right) = \alpha_1\left(\overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial\overline{\varpi}_1}{\partial y_1}, \dots\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r\left(\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial\varpi_1}{\partial x_1}, \dots\right) = \alpha_r\left(\overline{\varpi}_1(y), \dots \overline{\varpi}_m(y); \dfrac{\partial\overline{\varpi}_1}{\partial y_1}, \dots\right) \end{cases}$$

è compatibile.

Notiamo a questo punto che se il sistema S è integrabile, il suo integrale generale ha lo stesso grado di generalità (per quel che si è visto sulla natura delle soluzioni di S) dell'integrale di G; e che se G è transitivo, tra le sue equazioni di definizione non ve ne è nessuna di ordine zero. Non ve ne sarà dunque nessuna nemmeno nel sistema S, e poichè le equazioni (5) appartengono al sistema S e sono di ordine zero, esse devono ridursi a delle identità: ciò che, data la natura di quelle equazioni, non può avvenire altro che supponendo costanti gli invarianti $\alpha_1 \dots \alpha_m$.

Senza insistere maggiormente sulle condizioni di equivalenza di due gruppi, basta per lo scopo attuale osservare che le funzioni $\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x)$ sono soggette soltanto alle condizioni:

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha_1\left\{\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial\varpi_1}{\varpi x_1}, \dots\right\} = \text{costante} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1\left\{\varpi_1(x), \dots \varpi_m(x); \dfrac{\partial\varpi_1}{\partial x_1}, \dots\right\} = \text{costante} \end{cases}$$

È facile infatti riconoscere che inversamente ogni gruppo G le cui funzioni $\varpi_1(x) \dots \varpi_m(x)$ soddisfano alle (6) è transitivo e le sue equazioni G formano un sistema completamente integrabile. Alle condizioni (6) si soddisfa certamente prendendo per $\varpi_1 \dots \varpi_m$ delle costanti, nel qual caso il gruppo G contiene il sottogruppo delle traslazioni [1]; quindi tra i gruppi che vengono rappresentati da uno stesso sistema di Engel ve ne è certamente uno che contiene tutte le traslazioni.

3. Un gruppo qualunque si assume ordinariamente come rappresentante di una schiera infinita di gruppi; di tutti quelli cioè che si deducono dal dato con un cambiamento di variabili.

[1] Comptes rendus; 25 aprile 1898.

Se si pensa che dato un gruppo è sempre possibile presentare le sue equazioni di definizione sotto la forma di Engel, sembrerà giustificato l'assumere quel gruppo come rappresentante di tutti quegli altri che hanno a comune con esso la stessa forma. E siccome tra questi vi è sempre, come si è visto precedentemente, un gruppo con le traslazioni si potrà ogni volta assumere come rappresentante appunto questo gruppo. Il problema della determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad n dimensioni viene così considerevolmente semplificato.

Matematica. — *Sulle equazioni a coppie di integrali ortogonali.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Beltrami.

Le equazioni

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{A}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{B}\frac{\partial u}{\partial y}$$

tali che, per ogni famiglia $f_1(x, y, z) = \text{cost}$ *di superficie integrali, ne esiste un' altra ortogonale* $f_2(x, y, z) = \text{cost}$, *sono tutte e soltanto quelle, le cui caratteristiche*

$$\frac{dx}{\mathrm{A}} = \frac{dy}{\mathrm{B}} = -dz$$

godono della seguente proprietà:

Le rette cicliche, che, corrispondentemente ad ogni punto P *dello spazio, giacciono nel piano* π, *normale in quel punto alla caratteristica, non esauriscono, come nel caso generale, il complesso ciclico, ma formano soltanto un sistema* ∞^2, *cioè due congruenze* (coniugate, quando i coefficienti A e B sono reali).

Ho stabilito non è guari questo risultato con procedimento analitico (¹). Eccone una brevissima dimostrazione sintetica.

Sieno P e Q due punti generici dello spazio, π e χ i rispettivi piani normali alle caratteristiche. Per ogni famiglia $f(x, y, z) = \text{cost}$ di superficie integrali, diciamo ordinatamente a e b le intersezioni con π e χ dei piani tangenti α, β in P, Q.

Facendo variare la famiglia f, si viene a porre una corrispondenza fra le rette a del fascio (π, P) (così designamo il fascio, che appartiene al piano π ed ha P per centro) e le rette b del fascio (χ, Q). Per la natura della equazione (E), questa corrispondenza è tale che, ad una coppia qualunque di rette ortogonali del primo fascio, corrisponde nel secondo una coppia

(¹) Cfr. la Nota precedente: *Sulle congruenze di curve.*