ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Matematica. — *Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado.* Nota del Socio Straniero F. Klein.

(Estratto da una lettera al sig. Castelnuovo).

... Per quanto riguarda le equazioni di sesto grado, possiamo valerci ora del gruppo elegante di 360 collineazioni piane, che fu scoperto dal sig. Valentiner, e fu poi studiato a fondo, per la prima volta, dal sig. Wiman nel vol. 47 dei Mathematische Annalen.

Siano $x_1, x_2 \ldots x_6$ le radici della equazione di sesto grado. Si devono cercare tre funzioni z_1, z_2, z_3 di queste radici, i cui rapporti subiscano le sostituzioni del gruppo nominato, in corrispondenza alle permutazioni pari delle x. Quelle funzioni non possono però esser *razionali*, giacchè il gruppo delle 360 collineazioni piane non è oloedricamente isomorfo ad un gruppo di sostituzioni lineari, omogenee, ternarie, come fu già osservato dal sig. Wiman. Sta invece il fatto che il minimo gruppo isomorfo di sostituzioni lineari, omogenee, ternarie, che si può costruire, contiene il numero triplo di operazioni del gruppo di collineazioni; e precisamente alla collineazione identica corrispondono le tre sostituzioni.

$$(1) \qquad z'_1 = j^\nu z_1 \,, \; z'_2 = j^\nu z_2 \,, \; z'_3 = j^\nu z_3 \,. \qquad (j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \; ; \; \nu = 0 \,, 1 \,, 2)$$

Ora si domanda quale sia il modo più semplice per costruire tre funzioni *irrazionali* delle $x_1 \ldots x_6$, i cui rapporti si permutino in corrispondenza col nostro gruppo di collineazioni. A tal fine io propongo di ricorrere alla teoria delle curve piane del terzo ordine, e in particolare dei loro flessi. Infatti una forma cubica ternaria delle z_1, z_2, z_3, o delle variabili contragredienti w_1, w_2, w_3, non subisce alcuna alterazione in conseguenza delle sostituzioni (1), e quindi essa subisce solo 360 trasformazioni in corrispondenza alle 3.360 sostituzioni delle w_1, w_2, w_3. Segue che si possono subito formare delle funzioni razionali delle $x_1 \ldots x_6$, le quali, in corrispondenza colle sostituzioni pari delle x, subiscano le stesse sostituzioni lineari che le diverse espressioni di terzo grado nelle w_1, w_2, w_3. In altre parole: si può associare in modo covariante alle $x_1 \ldots x_6$ *una curva del terzo ordine del piano* z_1, z_2, z_3. Ciò fatto, si può scegliere uno dei nove flessi della cubica come punto covariante rispetto alle $x_1 \ldots x_6$. La determinazione di un tal flesso non esige, come è noto, altre irrazionalità che quelle esprimibili mediante radici cubiche e quadratiche. E così, col sussidio di irrazionalità accessorie, si perviene alla meta che si suole riguardare come elementare.