ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1899.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva.* Nota 2ª del Socio LUIGI BIANCHI.

Nella mia Nota precedente (1), utilizzando i recenti risultati ottenuti dal sig. Guichard nella teoria della deformazione delle quadriche di rotazione, ho stabilito un metodo di trasformazione per le superficie a curvatura costante positiva. Dimostrerò ora come l'integrazione del sistema di equazioni differenziali, che si presenta per applicare la trasformazione stessa, si riduca ad un'ordinaria equazione differenziale *lineare*. Alla nuova forma data al sistema differenziale si collega una classe di superficie, che hanno le medesime immagini sferiche delle linee di curvatura delle superficie applicabili sulla sfera e sono integrali di un'equazione di Ampère della forma che si presenta nelle ultime ricerche di Weingarten sull'applicabilità.

Considero poi la relazione delle nuove trasformazioni con quella ben nota (involutoria) dovuta ad Hazzidakis e dimostro che esse sono permutabili con questa.

Da ultimo ottengo una conferma delle previsioni, già enunciate nella Nota 1ª, dimostrando come le trasformazioni in discorso si applicano non solo alle superficie isolate, ma ben anche ai sistemi tripli ortogonali (di Weingarten), contenenti una tale serie di superficie a curvatura costante positiva.

(1) Questi Rendiconti, seduta 5 marzo, 1899.

1. Sia, come nella Nota 1ª:

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 \tag{1}$$

l'elemento lineare di una superficie S a curvatura $K = +1$, riferita alle sue linee di curvatura u, v, dove θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0\,. \tag{2}$$

Indichino W, Φ due funzioni di u, v assoggettate a soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali *lineari ed omogenee*, dove c indica una costante arbitraria:

$$(\mathrm{A})\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \coth\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} - \operatorname{tgh}\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + c\operatorname{senh}^2\theta W + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\Phi \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} = \coth\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} = -\coth\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \operatorname{tgh}\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial W}{\partial v} + c\cosh^2\theta W + (c+1)\operatorname{senh}\theta\cosh\theta\Phi \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -\coth\theta\frac{\partial W}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = -\operatorname{tgh}\theta\,\frac{\partial W}{\partial v}\,.$$

Il sistema formato dalle (A), (B) [1] è *illimitatamente integrabile*, a

[1] Si può dare al sistema (A), (B) una forma invariantiva, che vale per qualunque sistema coordinato (u, v). Se diciamo

$$E du^2 + 2F\, du\, dv + G dv^2$$
$$D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

le due forme differenziali quadratiche fondamentali della S, il sistema si scrive

$$(\mathrm{A}^*)\qquad \begin{cases} W_{11} = cEW - (c+1)D\Phi \\ W_{12} = cFW - (c+1)D'\Phi \\ W_{22} = cGW - (c+1)D''\Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = \dfrac{GD - FD'}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{ED' - FD}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = \dfrac{GD' - FD''}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{ED'' - FD'}{EG - F^2}\dfrac{\partial W}{\partial v} \end{cases},$$

i simboli W_{11}, W_{12}, W_{22} denotando le *derivate seconde covarianti* di W. Si osserverà che per $c = -1$ (valore che nelle attuali ricerche è escluso) il sistema (A*) si riduce a quello noto di Weingarten, che si integra appena note le geodetiche della superficie (Cf. *Lezioni*, pag. 525).

causa della (2), e si possono quindi dare ad arbitrio, per un sistema iniziale di valori delle variabili, i valori di

$$\Phi\,,\ \mathrm{W}\,,\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\,,\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\,,$$

sicchè nell' integrale generale del sistema figurano quattro costanti arbitrarie. In forza delle (A), (B), l' espressione

$$\Delta_1 \mathrm{W} + (c+1)\,\Phi^2 - c\mathrm{W}^2$$

è una costante, che pel nostro scopo conviene rendere nulla, ciò che si ottiene disponendo dei valori iniziali; si avrà quindi

$$\text{(C)} \qquad \Delta_1 \mathrm{W} = c\mathrm{W}^2 - (c+1)\,\Phi^2 .$$

Il segmento T che devesi staccare sopra ogni normale alla S, secondo la costruzione del n. 2 (Nota 1ª), è dato allora semplicemente da

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{W}}{\Phi}\,.$$

Indichiamo con $x\,,y\,,z$ le coordinate di un punto di S e con $(\mathrm{X}_1\,,\mathrm{Y}_1\,,\mathrm{Z}_1)$, $(\mathrm{X}_2\,,\mathrm{Y}_2\,,\mathrm{Z}_2)$, $(\mathrm{X}_3\,,\mathrm{Y}_3\,,\mathrm{Z}_3)$ rispettivamente i coseni di direzione delle tangenti alle linee $v = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$, $u = \mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ e della normale alla S. Le formole che dànno le coordinate $x'\,,y'\,,z'$ del punto corrispondente sulla superficie trasformata saranno le seguenti:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
x' &= x - \frac{2\mathrm{W}}{h(\mathrm{W}^2-\Phi^2)}\left\{\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\mathrm{X}_1 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\mathrm{X}_2 - \Phi\mathrm{X}_3\right\}\\
y' &= y - \frac{2\mathrm{W}}{h(\mathrm{W}^2-\Phi^2)}\left\{\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\mathrm{Y}_1 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\mathrm{Y}_2 - \Phi\mathrm{Y}_3\right\}\\
z' &= z - \frac{2\mathrm{W}}{h(\mathrm{W}^2-\Phi^2)}\left\{\frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial u}\mathrm{Z}_1 + \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial v}\mathrm{Z}_2 - \Phi\mathrm{Z}_3\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Come conferma, per l' elemento lineare della S′ troviamo:

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \operatorname{senh}^2\theta'\,du^2 + \cosh^2\theta'\,dv^2\,,$$

posto

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{senh}\theta' &= \frac{(\mathrm{W}^2+\Phi^2)\operatorname{senh}\theta + 2\mathrm{W}\Phi\cosh\theta}{\mathrm{W}^2-\Phi^2}\\
\cosh\theta' &= \frac{(\mathrm{W}^2+\Phi^2)\cosh\theta + 2\mathrm{W}\Phi\cosh\theta}{\mathrm{W}^2-\Phi^2}.
\end{aligned}\right.$$

2. Le superficie a curvatura costante positiva si presentano a coppie di superficie coniugate secondo la trasformazione di Hazzidakis [1]. Sia S_1 la superficie trasformata di Hazzidakis della S; il suo elemento lineare ds_1, riferito alle linee di curvatura, sarà dato da

$$ds_1^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2 .$$

Volendo ora applicare alla S_1 la nostra trasformazione, avremo un sistema analogo ad (A), (B), che si deduce da questo scambiando W con Φ e cangiando c in $-(c+1)$. Da questa semplice osservazione deriva la conseguenza: *Il segmento da riportarsi sopra ogni normale della trasformata di Hazzidakis* S_1 *è precisamente l'inversa del segmento riportato sulla normale alla primitiva* S.

Ne segue che il luogo Σ' dei termini dei secondi segmenti sarà applicabile sull'ellissoide se il luogo analogo Σ pei primitivi sarà applicabile sull'iperboloide ed inversamente.

Sia ora S' la superficie a curvatura costante positiva normale ai raggi riflessi sulla Σ delle normali alla S, e similmente S_1' la nuova trasformata della S_1. Sussiste il notevole teorema: *Le due superficie* S', S_1' *sono ancora trasformate di Hazzidakis l'una dell'altra.*

Questo risultato può anche enunciarsi così: *La trasformazione involutoria di Hazzidakis è permutabile colle nuove trasformazioni.*

3. L'elemento lineare (1) appartiene altresì alla sfera di raggio $=1$; esso è l'elemento sferico rappresentativo della trasformata S' di Hazzidakis.

Consideriamo ora la superficie $\overline{S}$ inviluppata dal piano parallelo al piano tangente di S' e distante dall'origine di $p = W$. Si trova che i raggi principali r_1, r_2 di curvatura della $\overline{S}$ soddisfano all'equazione:

$$r_1 r_2 - (c+1)\, p(r_1 + r_2) + (c+1)\, 2q = 0, \tag{4}$$

significando $2q$ il quadrato della distanza dell'origine dal punto di contatto del piano tangente di $\overline{S}$. Le superficie (4), che hanno a comune colle superficie applicabili sulla sfera l'immagine sferica delle linee di curvatura, appartengono alla classe, considerata da Weingarten, di quelle superficie che soddisfano ad un'equazione d'Ampère della forma

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (r_1 + r_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + r_1 r_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0 ,$$

avendo qui la funzione φ il valore

$$\varphi = \sqrt{(c+1)\,p^2 - 2q} .$$

[1] Cfr. *Lezioni*, pag. 447.

Ogni superficie della classe (4), trasformata con un' inversione per raggi vettori reciproci col centro nell' origine, dà una superficie della medesima specie. Le superficie a curvatura costante positiva che hanno a comune con queste ultime l' immagine sferica delle linee di curvatura sono precisamente quelle che le nuove trasformazioni fanno derivare dalla primitiva S.

4. Veniamo ora a considerare un sistema triplo ortogonale (u, v, w) contenente una serie di superficie S a curvatura costante positiva $K = +1$. All' elemento lineare dello spazio, riferito ad un tale sistema triplo ortogonale, potremo dare la forma (1):

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2,$$

dove θ soddisfa alle equazioni a derivate parziali

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0\\ &\frac{1}{\operatorname{senh}^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\right)^2 + \frac{1}{\cosh^2\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 = 1\,.\end{aligned}\right.$$

Di ciascuna superficie S ($w = \text{cost}^{\text{te}}$) prendiamo una trasformata S′, secondo una delle nostre trasformazioni, e sia

$$T(u, v, w)$$

il segmento che dobbiamo riportare sulla normale in ogni punto alla S (Nota 1ª, § 2). Domandiamo di determinare, se è possibile, T in funzione di u, v, w in guisa che le nuove superficie S′ facciano nuovamente parte di un sistema triplo ortogonale. La funzione T deve intanto soddisfare alle due equazioni della Nota 1ª:

$$(\alpha)\quad \frac{1}{(\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{(\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta)^2}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 = cT^2 - (c+1)$$

$$\begin{aligned}(\beta)\quad \frac{\partial^2 T}{\partial u\,\partial v} = &\left(\frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta} + \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\right)\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} +\\ &+ \frac{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial u}\,.\end{aligned}$$

La condizione imposta che le S′ facciano parte di un nuovo sistema triplo ortogonale porta poi alla nuova equazione:

$$\begin{aligned}(\gamma)\quad (c+1)\frac{\partial T}{\partial w} = [cT^2 - (c+1)]\,\frac{\partial T}{\partial w} &- \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w}\cdot\frac{T}{\operatorname{senh}\theta + T\cosh\theta}\frac{\partial T}{\partial u} -\\ &- \frac{1}{\cosh\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w}\cdot\frac{T}{\cosh\theta + T\operatorname{senh}\theta}\frac{\partial T}{\partial v}\,.\end{aligned}$$

(1) *Lezioni*, pag. 530.

Il sistema costituito dalle $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ ammette, a causa delle (5), un integrale T contenente due costanti arbitrarie, potendosi fissare comunque i valori iniziali di

$$T, \frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v},$$

purchè legati dalla (α). Per *una* delle superficie S può quindi fissarsi ad arbitrio la trasformata S' che si vuole considerare e ne risultano allora pienamente determinate le trasformate di tutte le altre. Così adunque: *Da un sistema triplo ortogonale contenente una serie di superficie a curvatura* $K = +1$, *coll' integrazione di un' equazione differenziale ordinaria, si possono far derivare* ∞^3 *nuovi sistemi della medesima specie.*

Aggiungiamo che, procedendo in modo analogo come per le superficie isolate, si potrà dare al sistema da integrarsi la forma *lineare*.

Resterà in fine da considerarsi il caso in cui nel sistema triplo ortogonale la curvatura di ogni singola superficie S è costante (positiva) ma variabile dall' una all' altra, cioè funzione di w. In tal caso la costante assoluta c sarà da sostituirsi con una conveniente funzione di w.

Osservazioni circa le ultime ricerche del sig. Darboux.

Il sig. Darboux, in due recenti comunicazioni all' Accademia delle Scienze di Parigi [1], si occupa anch' egli dei teoremi sulle deformazioni delle quadriche enunciati dal sig. Guichard. Alla fine della seconda sua Nota si leggono le espressioni seguenti: *Dans une autre Communication, je démontrerai ces propositions par une voie géométrique toute différente et je montrerai que, en ce qui concerne les surfaces à courbure constante, elles ne donnent pas de méthode de transformation distincte de celles de M. M. Bianchi et Bäcklund.*

Il successivo numero 15 dei Comptes Rendus non contiene alcuna nuova comunicazione del sig. Darboux, nè io so quindi come verrà dimostrato il suo asserto. Ma poichè egli sembra qui alludere alle mie ultime ricerche, sebbene non ne faccia menzione, credo opportuno dire qualche parola sull' argomento per spiegare fino da ora in quale senso una tale affermazione può dirsi esatta.

Il sig. Darboux non si preoccupa evidentemente di distinguere il reale dall' immaginario e, sotto questo punto di vista, è certo indifferente parlare delle superficie a curvatura costante negativa, o positiva (o con qualunque altro valore complesso della curvatura), passandosi dalle une alle altre con un' omotetia immaginaria. Ben diversa è la cosa se, collocandoci dal punto

(1) Seduta del 27 marzo e del 4 aprile (nn. 13, 14).

di vista reale, domandiamo di costruire quante si vogliano nuove superficie *reali* a curvatura costante positiva. Le antiche trasformazioni, direttamente applicate ad una tale superficie reale, danno allora soltanto superficie immaginarie.

Ora sussiste effettivamente la proprietà che le trasformazioni *reali* delle superficie a curvatura costante positiva *da me trovate* possono comporsi ciascuna con due successive trasformazioni *immaginarie* di Bäcklund. È questa certamente un' osservazione interessante; ma non mi sembra che essa diminuisca l' importanza del risultato conseguito.

Invero non era affatto evidente a priori che si potesse applicare ad una superficie reale a curvatura costante positiva una trasformazione immaginaria di Bäcklund, indi alla nuova superficie immaginaria ottenuta un' altra *conveniente* trasformazione immaginaria, in guisa che la seconda trasformata risultasse nuovamente reale ([1]). Parmi piuttosto che questo fatto, ora accertato, spieghi appunto la ragione per la quale rimasero così lungo tempo nascoste le nuove trasformazioni reali. Queste sono insomma di natura più complicata delle antiche e possono risolversi in tali trasformazioni più semplici, solo ricorrendo ad opportune trasformazioni componenti immaginarie.

Aggiungerò in fine che, persino per le superficie pseudosferiche, le mie ultime ricerche danno, dal punto di vista reale, risultati essenzialmente nuovi. Le trasformazioni di queste superficie, ottenute per la nuova via, offrono invero tre casi distinti, secondo che la costante, indicata con a nella mia prima Nota del 19 febbraio (§ 5), è $=1$, ovvero >1 o in fine <1.

Se $a=1$, la trasformazione si compone di due successive trasformazioni complementari, come già è dimostrato al § 7 della medesima Nota.

Quando $a>1$, la trasformazione si compone di due trasformazioni *reali* di Bäcklund, nelle quali le corrispondenti congruenze pseudosferiche presentano la medesima lunghezza costante del segmento focale.

Ma, quando $a<1$, la nostra trasformazione reale si può risolvere soltanto in due componenti di Bäcklund *immaginarie*. Dal punto di vista reale essa è quindi una trasformazione *nuova*.

Tutto questo apparirà meglio in un' ampia Memoria che sto preparando per la pubblicazione.

([1]) Ciò, dico, era così poco evidente che tentativi diretti, fatti appunto in questo senso da altri e da me, erano rimasti infruttuosi.