ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

raramente soltanto da Anofeli affamati, a cui egli per lo più deve avvicinare la mano per attirarli.

È assai difficile pronunciarsi definitivamente su dati negativi; *finora però* si deve dire che quegli *Anopheles*, i quali non hanno punto individui malarici non sono infetti, ossia non sono capaci di inocularci la malaria e che l'unico modo di trasmissione della malaria umana è quello da noi scoperto e precisato nelle nostre Note preliminari. Noi però continuiamo negli esperimenti e nelle osservazioni su questo punto fondamentale del problema malarico, ben sapendo che un sol fatto positivo potrebbe mutare del tutto la questione.

Zoologia medica. — *Sui germi del pyrosoma nelle glandole salivari dei giovani Rhipicephalus.* Nota del Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle funzioni reali di una variabile.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio Blaserna.

Un interessante problema di idrostatica condusse il prof. Somigliana alla considerazione del seguente problema di analisi [1].

Data una serie di numeri disposti arbitrariamente

$$a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,\ldots\,a_n\,, \tag{1}$$

è sempre possibile disporli in un nuovo ordine

$$a'_1\,,\,a'_2\,,\,a'_3\,\ldots\,a'_n\,, \tag{1'}$$

in modo che sia:

$$a'_i \leq a'_{i+1}\,.$$

Sia data ora una funzione $f(x)$ reale, ad un valore, sempre finita ed avente un numero finito di oscillazioni nell'intervallo finito da $x=a$ ad $x=b$. Si vuol trovare una nuova funzione della variabile x, la quale assuma tutti i valori della $f(x)$, sia sempre crescente nell'intervallo $(a\,,\,b)$ ed inoltre abbia rispetto alla funzione data proprietà analoghe a quelle della serie (1') rispetto alla serie (1).

Il prof. Somigliana dimostrò in generale l'esistenza della funzione *ordinata* cercata ed indicò un procedimento, che in alcuni casi può servire alla sua costruzione. Ora, appoggiandomi al teorema di esistenza della funzione

[1] Vedi questi Rendiconti, vol. VIII, pag. 4.

ordinata, io mi propongo di svolgere brevemente nella presente Nota un metodo generale per la sua determinazione analitica.

§ 1. *Proprietà della derivata prima della funzione ordinata per rapporto alla variabile.* Noi abbiamo supposto che la funzione data abbia nell'intervallo (a, b) un numero finito di massimi e minimi. Indichiamo con $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ le ordinate corrispondenti ad essi e con $f(x_1), f(x_2)$, $f(x_3) \dots f(x_n)$ i valori corrispondenti della funzione.

Sia y' un valore qualunque di $f(x)$; ad esso corrisponderanno uno o più valori della variabile indipendente che indicheremo con $x'_1, x'_2, x'_3, \dots x'_m$, ove per la natura del problema si ha: $1 \leq m \leq n+1$. Indichiamo con $y' + \Delta y'$ un altro valore della funzione poco differente da y' e con $x'_1 + \Delta x'_1$, $x'_2 + \Delta x'_2$, $x'_3 + \Delta x'_3, \dots x'_m + \Delta x'_m$ i corrispondenti valori della variabile indipendente, in cui le quantità $\Delta x'_1, \Delta x'_2, \Delta x'_3, \dots \Delta x'_m$ possono essere alcune positive, altre negative.

Secondo la definizione della funzione ordinata $\mathrm{O}f(x)$, l'intervallo $\Delta x'$ corrispondente al passaggio della funzione $\mathrm{O}f(x)$ dal valore y' ad $y' + \Delta y'$, sarà uguale alla somma dei valori assoluti di tutti gli intervalli $\Delta x'_1, \Delta x'_2$, $\Delta x'_3, \dots \Delta x'_m$; cioè si avrà l'eguaglianza:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta \mathrm{O}f(x)}\right)_{\mathrm{O}f(x)=y'} = \frac{|\Delta x'_1| + |\Delta x'_2| + |\Delta x'_3| + \cdots + |\Delta x'_m|}{(\Delta f(x))_{f(x)=y'}}.$$

Passando al limite e ricordando che nelle condizioni in cui ci siamo posti la funzione $\mathrm{O}f(x)$ possiede evidentemente una derivata, avremo:

$$\left(\frac{dx}{d\,\mathrm{O}f(x)}\right)_{\mathrm{O}f(x)=y'} = \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_1} + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_2} + \cdots + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_m},$$

ossia

$$\left(\frac{d\mathrm{O}f(x)}{dx}\right)_{\mathrm{O}f(x)=y'} = \frac{1}{\left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_1} + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_2} + \cdots + \left(\left|\frac{dx}{df(x)}\right|\right)_{x=x'_m}}.$$

Da questa formula si deduce facilmente: 1° che la derivata della funzione ordinata si annullerà ogni volta che questa assumerà valori eguali ai massimi e minimi della funzione data; 2° che se la funzione $f(x)$ ammette una derivata continua in tutto l'intervallo (a, b), la funzione ordinata ammetterà a sua volta una derivata, la quale sarà in generale discontinua solo per i valori di $\mathrm{O}f(x)$ eguali ai valori di $f(x)$ corrispondenti ai limiti $x = a$ ed $x = b$; si deve eccettuare solo il caso in cui la $f(x)$ possieda in questi punti una derivata nulla, al quale caso corrisponderà una derivata della $\mathrm{O}f(x)$ continua in tutto l'intervallo (a, b).

§ 2. *Espressione analitica della derivata* $\frac{dOf(x)}{dx}$ *e deduzione della funzione ordinata.* Rappresentiamo con $F_1(x), F_2(x), \ldots F_{n+1}(x)$ funzioni che per valori di $f(x)$ compresi fra $f(a)$ ed $f(x_1)$, $f(x_1)$ ed $f(x_2)$, ... $f(x_n)$ ed $f(b)$ assumano rispettivamente i valori del modulo di $\frac{dx}{df(x)}$ in ognuno di questi intervalli e si annullino per ognuno degli altri valori di $f(x)$.

Similmente indichiamo con $OF(x)$ una funzione che assuma nell' intervallo (a, b) i valori della funzione $\frac{1}{\frac{dOf(x)}{dx}}$ e si annulli fuori di esso.

Allora avremo evidentemente l' equazione:

$$OF(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_{(n+1)}(x),$$

dalla quale si potrà dedurre $\frac{dOf(x)}{dx}$ e quindi integrando la $Of(x)$ cercata. La costante di integrazione si determinerà evidentemente in modo che per $x = a$ la funzione $Of(x)$ assuma il valore minimo assoluto della funzione $f(x)$.

Le funzioni $F_1(x), F_2(x), \ldots F_{n+1}(x)$ si potranno formare rispettivamente, o moltiplicando il modulo della derivata $\frac{dx}{df(x)}$ per quantità (in generale per integrali definiti) che abbiano il valore *uno* nel corrispondente intervallo e *zero* fuori di esso, oppure usando qualcuna delle note rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile data arbitrariamente in un intervallo ed annullantesi fuori di esso.

In entrambi i casi bisognerà analizzare in modo speciale le singolarità che in generale avvengono ai limiti di queste rappresentazioni. Se si fa uso dell' integrale di Dirichlet $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cos(\varphi y)\, dy$, oppure del doppio integrale di Fourier, ai limiti la funzione rappresentata avrà un valore uguale alla metà di quello che dovrebbe realmente avere; nel nostro caso però corrispondendo ai valori limiti $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$ valori infiniti della derivata $\frac{dx}{df(x)}$, potremo limitare la nostra ricerca particolare ai valori $f(a)$ ed $f(b)$.

L'estensione del metodo esposto ai casi di discontinuità considerati dal prof. Somigliana non presenta alcuna nuova difficoltà.

§ 3. Proponiamovi di determinare come esempio semplice la relazione generale fra una funzione $f(x)$ simmetrica rapporto all' ordinata in $\frac{a+b}{2}$, sempre crescente fra a ed $\frac{a+b}{2}$ e sempre decrescente fra $\frac{a+b}{2}$ e b, e la sua corrispondente funzione ordinata. Questo esempio differisce poco da quello scelto dal prof. Somigliana al fine della sua Nota.

Noi avremo dunque per definizione l' identità:

$$f\left(\frac{a+b}{2}+x\right)\equiv f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)$$

e derivando per rapporto ad x:

$$(\alpha) \qquad f'\left(\frac{a+b}{2}+x\right)\equiv -f'\left(\frac{a+b}{2}-x\right).$$

Per costruire le $\mathrm{OF}(x)$, $\mathrm{F}_1(x)$ ed $\mathrm{F}_2(x)$ facciamo uso dell' integrale di Dirichlet:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos(\varphi y)\,dy$$

il quale ha costantemente il valore 1 per $-1<\varphi<1$, il valore zero per $-1>\varphi>1$ ed il valore $\frac{1}{2}$ per $\varphi=\pm 1$. Potremo evidentemente assumono per le $\mathrm{F}_1(x)$, $\mathrm{F}_2(x)$ e $\mathrm{OF}(x)$ le espressioni:

$$\mathrm{F}_1(x)=\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{x-a}{\frac{a+b}{2}-a}\pi\right)dy,$$

$$\mathrm{F}_2(x)=-\frac{1}{f'(x)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-\frac{a+b}{2}}\pi\right)dy,$$

$$\mathrm{OF}(x)=\frac{1}{\frac{d\,\mathrm{O}f(x)}{dx}}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\operatorname{sen}\frac{2x-a-b}{b-a}\,\frac{\pi}{2}\right)dy.$$

Facciamo nel primo integrale $x=\frac{a+b}{2}+\lambda$, nel secondo $x=\frac{a+b}{2}-\lambda$ e sommiamo. Avremo:

$$\mathrm{F}_1(x)+\mathrm{F}_2(x)=\frac{1}{f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{b-a+2\lambda}{b-a}\pi\right)dy-$$

$$-\frac{1}{f'\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\cos\frac{2\lambda}{b-a}\pi\right)dy.$$

Serviamoci della identità (α) e mutiamo $f'\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\right)$ in $-f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)$.

Si avrà:

$$F_1(x)+F_2(x)=\frac{1}{f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)}\cdot\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} y}{y}\left[\cos\left(y\cos\frac{b-a+2\lambda}{b-a}\pi\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(y\cos\frac{2\lambda\pi}{b-a}\right)\right]dy\,.$$

Applicando ripetutamente la formula di trasformazione trigonometrica: $\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma).\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ si giunge facilmente alla formula:

$$F_1(x)+F_2(x)=\frac{2}{f'\left(\frac{a+b}{2}+\lambda\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\operatorname{sen}\frac{b-a+4\lambda}{b-a}\frac{\pi}{2}\right)dy.$$

Poniamo finalmente $\lambda=\frac{x-b}{2}$ ed avremo:

$$F_1(x)+F_2(x)=\frac{2}{f'\left(\frac{x+a}{2}\right)}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} y}{y}\cos\left(y\operatorname{sen}\frac{2x-a-b}{b-a}\frac{\pi}{2}\right)dy\,.$$

Ma $F_1(x)+F_2(x)=OF(x)$; quindi quest' ultima espressione deve essere identica a quella assunta per $OF(x)$, donde segue:

$$\frac{dOf(x)}{dx}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

e quindi:

$$Of(x)=f\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

essendo nulla la costante di integrazione.

Matematica. — *Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette.* Nota del dott. P. BURGATTI, presentata dal Socio CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.