ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Anche le facole, al pari delle protuberanze, furono in questo trimestre molto più frequenti nelle zone australi, col massimo di frequenza nella zona (0° — 20°) come nel precedente trimestre. Le macchie risultarono pure molto più abbondanti al sud dell' equatore, per modo che tutti i fenomeni solari furono più frequenti nell' emisfero australe. I gruppi di macchie si estesero dall' equatore fino a ± 20° soltanto, come nel trimestre precedente.

Nessuna eruzione fu osservata.

Matematica. — *Sulle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante.* Nota III del Socio LUIGI BIANCHI.

Alla fine della mia Nota precedente [1] ho già indicato che le nuove trasformazioni reali delle superficie a curvatura costante, negativa o positiva, possono comporsi con due trasformazioni complementari, di Bäcklund reali od immaginarie.

Nella presente Nota farò vedere come, partendo dai risultati del teorema di *permutabilità*, teorema da me trovato nel 1892 e pubblicato in questi Rendiconti [2], si possono facilmente stabilire le formole effettive che danno le nuove trasformazioni.

È mio debito avvertire che nel frattempo un sistema di formole equivalenti in sostanza a quelle da me trovate, è stato pubblicato nei Comptes Rendus de l'Académie (24 avril) dal sig. Darboux.

La circostanza che merita di esser posta maggiormente in rilievo è certamente questa, che anche per le nuove trasformazioni valgono tutte le conseguenze da me altravolta dedotte dal teorema di permutabilità. Si arriva così all' importante risultato espresso nella proposizione seguente:

Quando per una data superficie a curvatura costante, positiva o negativa, siasi completamente integrato il sistema di equazioni fondamentali che definiscono la trasformazione, la successiva applicazione del metodo alle nuove superficie via via ottenute non richiederà mai altro che calcoli algebrici e di differenziazione.

Questo è per esempio il caso per le superficie (d' Enneper) a curvatura costante positiva che ho dedotto alla fine della mia Nota del 5 marzo.

Così anche la teoria delle superficie a curvatura costante *positiva* viene senz' altro portata a quel grado di sviluppo, che la teoria delle superficie pseudosferiche già da diversi anni aveva raggiunto.

1. Cominciamo la ricerca dal caso della curvatura negativa, come quello nel quale soltanto può darsi che le trasformazioni componenti, complementari o di Bäcklund, siano reali.

[1] Presentata nella seduta del 23 aprile 1899.
[2] Serie 5ª, vol. I, 2° sem. Vedi anche § 257 e sgg.

Già nella mia prima Nota del 19 febbraio ho osservato come le nuove trasformazioni delle superficie pseudosferiche offrano tre casi distinti, a seconda che per la costante indicata con a al § 5 di detta Nota si ha

$$a = 1\,, \quad a > 1\,, \quad \text{ovvero } a < 1.$$

1°. Se $a = 1$, la trasformazione si compone di due successive complementari (l. c. § 7) e potrebbe dirsi la trasformazione *bicomplementare*. Precisamente si ha:

Se S′, S″ *sono due superficie pseudosferiche complementari di una medesima* S, *le normali a* S′, S″ *in due punti corrispondenti si incontrano in un punto, il cui luogo è applicabile sulla superficie logaritmica di rotazione; si passa da* S′ *a* S″ *con una trasformazione bicomplementare.*

2. Siano ora S′, S″ due superficie pseudosferiche trasformate di Bäcklund di una medesima superficie pseudosferica S e precisamente i valori della costante σ per le due trasformazioni siano eguali e di segno contrario. Allora abbiamo il teorema:

Le normali a S′, S″ *in due punti corrispondenti* M′, M″ *s' incontrano in un punto* P *il cui luogo è una superficie* Σ *applicabile sul catenoide accorciato; i punti* M′, M″ *giacciono simmetricamente rispetto al piano tangente nel punto corrispondente* P *di* Σ.

La trasformazione colla quale si passa da S′ a S″ è quindi una delle nuove trasformazioni e corrisponde ad un valore $a > 1$ della costante a.

3°. Per trattare ora il 3° caso riferiamoci ai risultati del teorema di permutabilità, come sono esposti a pag. 435 e sgg. delle *Lezioni*.

Essendo ω una soluzione dell' equazione

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \operatorname{sen} \omega \cos \omega\,, \tag{a}$$

le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} &= \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma_1}{\cos \sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega) \\ \frac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v} &= \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma_1}{\cos \sigma_1} \operatorname{sen}(\omega_1 - \omega)\,, \end{aligned}\right. \tag{b}$$

dove σ_1 indica una costante arbitraria, costituiscono per la funzione incognita ω_1 un sistema illimitatamente integrabile, sicchè la soluzione generale ω_1 contiene (oltre σ_1) una costante arbitraria. Inoltre la ω_1 è una nuova soluzione dell' equazione fondamentale (a).

Indicando con σ_2 una nuova costante, diversa da σ_1, determiniamo similmente una terza soluzione ω_2 della (a) dalle equazioni analoghe:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_2 - \omega)}{\partial v} &= \frac{1 + \operatorname{sen} \sigma_2}{\cos \sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_2 + \omega) \\ \frac{\partial(\omega_2 + \omega)}{\partial v} &= \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma_2}{\cos \sigma_2} \operatorname{sen}(\omega_2 - \omega)\,. \end{aligned}\right. \tag{c}$$

Il teorema di permutabilità ci insegna allora che si ottiene *in termini finiti* una quarta soluzione ω_3 della (a) dalla relazione

$$(d)\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_3-\omega}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)}\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right).$$

Questa soluzione ω_3 è legata come ω, ad ω_1, ω_2 dalle medesime equazioni (b) (c), ove soltanto si ponga ω_3 in luogo di ω, e si invertono le due costanti σ_1, σ_2 fra loro.

Analiticamente questo risultato è indipendente, come è naturale, dall' essere le funzioni ω, ω_1, ω_2, ω_3 e le costanti σ_1, σ_2 reali o complesse. Ora suppongasi ω reale e σ_1 complesso; indicando con $\overline{\sigma}_1$ la coniugata di σ_1, pongasi

$$\sigma_2=\overline{\sigma}_1 .$$

La ω_1, definita dalle (b), sarà naturalmente complessa e si vede subito che alle (c) si potrà soddisfare prendendo per ω_2 la coniugata di ω_1:

$$\omega_2=\overline{\omega}_1 .$$

Se poniamo scindendo il reale dall' immaginario

$$\sigma_1=\sigma+i\sigma',\quad \sigma_2=\sigma-i\sigma'$$
$$\omega_1=\theta+i\varphi,\quad \omega_2=\theta-i\varphi,$$

la (d) diventa

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_3-\omega}{2}\right)=\frac{\cos\sigma}{\operatorname{senh}\sigma'}\operatorname{tgh}\varphi$$

e ci dimostra che ω_3 *ritorna nuovamente reale*. In particolare ciò vale se supponiamo σ_1 puramente immaginario cioè $\sigma=0$ (¹). Allora la superficie pseudosferica S_3, corrispondente alla soluzione ω_3 della (a), deriva da S appunto per mezzo di una delle nuove trasformazioni, che corrisponde ad un valore $a<1$ della costante a. Si ha cioè il risultato:

La superficie pseudosferica S_3 *può collocarsi in tale posizione nello spazio che le normali a* S, S_3 *in punti corrispondenti* M, M_3 *si incontrino in un punto corrispondente* P, *il cui luogo è una superficie* Σ *applicabile sulla superficie di rotazione avente per meridiano la curva*

$$r=m\operatorname{senh}z;$$

(¹) La trasformazione più generale che si ottiene supponendo $\sigma\neq 0$ si compone del resto mediante questa elementare combinata con trasformazioni di Lie, nello stesso modo come la trasformazione di Bäklund risulta dal combinare una trasformazione complementare con trasformazioni di Lie (*Lezioni* pag. 894).

i punti corrispondenti M, M_3 *sono simmetrici rispetto al piano tangente in* P *a* Σ.

2. Passiamo ora al caso delle superficie a curvatura costante positiva K e poniamo, al solito, $K = +1$. Ricordiamo che la determinazione di tali superficie dipende dalla integrazione della equazione a derivate parziali

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0\,;$$

ad ogni soluzione θ di questa equazione corrisponde una tale superficie d'elemento lineare

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2\,,$$

le line u, v essendo le linee di curvatura (¹).

Ora indicando con σ_1 una costante qualunque reale o complessa, prendiamo il seguente sistema di equazioni simultanee per una nuova funzione incognita θ_1:

$$(\beta) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\theta_1}{\partial u} + i\frac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 + \cosh\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 \\ &i\frac{\partial\theta_1}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = -\operatorname{senh}\sigma_1\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_1 - \cosh\sigma_1\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_1 \end{aligned}\right.$$

$$(i = \sqrt{-1})\,.$$

La condizione d'integrabilità è identicamente soddisfatta, a causa della (α), e la soluzione più generale θ_1 di questo sistema contiene quindi (oltre σ_1) una costante arbitraria; di più risulta θ_1 una nuova soluzione della (α).

Prendiamo ora un secondo valore σ_2 per la costante σ_1 e determiniamo similmente θ_2 dalle equazioni simultanee omologhe:

$$(\gamma) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\theta_2}{\partial u} + i\frac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{senh}\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2 + \cosh\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 \\ &i\frac{\partial\theta_2}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u} = -\operatorname{senh}\sigma_2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta_2 - \cosh\sigma_2\cosh\theta\operatorname{senh}\theta_2\,, \end{aligned}\right.$$

cosicchè θ_2 sarà una nuova soluzione della (α).

Ora vale anche qui, per la equazione (α), un teorema di permutabilità. Possiamo infatti trovare *in termini finiti* una quarta soluzione θ_3 dell'(α) dalla equazione

$$(\delta) \qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\coth\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right).$$

(¹) Propriamente alla soluzione θ corrisponde anche una seconda superficie coll'elemento lineare

$$ds^2 = \cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\, dv^2$$

che si deduce dalla primitiva con una trasformazione di Hazzidakis.

Questa quarta soluzione θ_3 viene legata a θ_1, θ_2 dalle medesime equazioni (β), (γ), ove si cangi θ in θ_3 e si *permutino* le due costanti σ_1, σ_2.

Ora, scindendo il reale dall'immaginario, pongasi

$$\sigma_1 = \sigma + i\sigma', \quad \theta_1 = \omega + i\varphi$$

e si supponga che la soluzione θ da cui si parte sia *reale*. Si vedrà subito che le (γ) possono soddisfarsi ponendo

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= -\bar{\sigma}_1 = -\sigma + i\sigma', \\ \theta_2 &= -\bar{\theta}_1 + \pi i = -\omega + i\varphi + \pi i \end{aligned}$$

e la (δ) che diventa

$$(\delta^*) \qquad \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega$$

dimostra quindi che la soluzione finale θ_3 ritorna *reale*.

Suppongasi in particolare che sia σ_1 reale, cioè sia $\sigma' = 0$ [1]. Scindendo nelle (β) il reale dall'immaginario, si ottiene per le funzioni incognite reali ω, φ il seguente sistema di equazioni ai differenziali totali, che è *illimitatamente integrabile*:

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = (\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\omega + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\omega) \cos\varphi \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = -(\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\omega + \cosh\sigma \cosh\theta \cosh\omega) \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

$$(\varepsilon^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = (\operatorname{senh}\sigma \cosh\theta \cosh\omega + \cosh\sigma \operatorname{senh}\theta \operatorname{senh}\omega) \operatorname{sen}\varphi \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = (\operatorname{senh}\sigma \operatorname{senh}\theta \cosh\omega + \cosh\sigma \cosh\theta \operatorname{senh}\omega) \cos\varphi \end{cases}$$

e la formola (δ') ci definisce, col valore di θ_3, una superficie S_3 di curvatura $K = +1$ coll'elemento lineare

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2\theta_3 \, du^2 + \cosh^2\theta_3 \, dv^2 ,$$

[1] Anche qui le trasformazioni più generali ottenute supponendo $\sigma' \neq 0$ si compongono di quelle da noi considerate corrispondenti a $\sigma' = 0$ e di trasformazioni di Bonnet. Propriamente indicando con T una tale trasformazione generale con T_0 la nostra particolare e con B_α una conveniente trasformazione di Bonnet-Lie, si ha

$$T = B_\alpha T_0 B_\alpha^{-1}$$

(cfr. *Lezioni*, pag. 434). Per trasformazione B_α Bonnet intendiamo quella che fa passare dalla soluzione $\theta(u, v)$ della (α) all'altra

$$\Theta(u, v) = \theta(u\cos\alpha - v \operatorname{sen}\alpha, u \operatorname{sen}\alpha + v\cos\alpha) .$$

essendo α una costante.

la quale deriva da S precisamente colla trasformazione della mia Nota del 5 marzo.

Se si pone infatti

$$\mathrm{T} = \operatorname{tgh}\left(\frac{\theta_3 - \theta}{2}\right) = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{thg}\omega\ ,$$

si vede che T soddisfa appunto alle equazioni (A) di detta Nota, ove si prenda $c = -\cosh^2\sigma$. Ne risulta che riportando sulla normale alla S un segmento $= \mathrm{T}$, il luogo degli estremi è una superficie Σ applicabile sull'ellissoide allungato di rotazione di semiasse maggiore $= 1$, di semiasse minore $= \dfrac{1}{\cosh\sigma}$.

Volendo poi mettere in relazione le formole date sopra con quelle della Nota precedente [1], si può in particolare domandare come si calcoleranno i corrispondenti valori di W, Φ che soddisfano al sistema differenziale (A), (B) di quella Nota. Si perviene allora al risultato seguente: La funzione Φ viene determinata (a meno di un fattore costante) per quadrature, dalle formole

$$\frac{\partial \log\Phi}{\partial u} = -\frac{\operatorname{senh}\sigma\cosh\theta\cos\varphi}{\cosh\omega}$$
$$\frac{\partial \log\Phi}{\partial v} = \frac{\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cosh\omega}\ ,$$

dopo di che si avrà

$$\mathrm{W} = \Phi \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega.$$

Così abbiamo considerato soltanto quel caso delle nostre trasformazioni in cui la costante c ha un valore negativo, cioè la superficie Σ luogo degli estremi dei segmenti staccati sulle normali di S è applicabile sull'ellissoide. Ma per avere anche le formole relative al caso di c positivo, basta nelle formole precedenti, in particolare nelle (ε), (ε^*) scambiare u con v. Con ciò valgono ancora tutte le nostre conclusioni; soltanto il segmento da staccarsi sulla normale sarà allora

$$\mathrm{T} = \coth\sigma\coth\omega > 1.$$

Così saranno soddisfatte le equazioni (A) della Nota del 5 marzo, ove si prenda la costante $c = \operatorname{senh}^2\sigma$. Allora la superficie Σ, luogo degli estremi dei segmenti T, è applicabile sull'iperboloide di rotazione a due falde, la cui iperbola meridiana ha per lunghezze a, b dei semiassi trasverso e coniugato i rispettivi valori

$$a = 1\ ,\quad b = \frac{1}{\operatorname{senh}\sigma}.$$

(1) 23 aprile, fasc. 8°.