ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1899.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Osservazioni astronomiche e fisiche sulla topografia e costituzione del pianeta Marte, fatte nella Specola Reale di Brera in Milano coll' equatoriale Merz-Repsold (18 pollici) durante l' opposizione del 1888.* Memoria VI del Socio G. V. Schiaparelli.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Matematica. — *Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio Cerruti.

1. Siano $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ le equazioni della superficie iniziale (I) di una congruenza (G), e $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ i coseni di direzione della retta di (G) che passa per il punto $M(u, v)$. Ponendo

$$\Sigma X \frac{\partial x}{\partial u} = P, \quad \Sigma X \frac{\partial x}{\partial v} = Q, \tag{1}$$

si hanno le identità:

$$\begin{cases} \Sigma X \left(\dfrac{\partial x}{\partial u} - PX \right) = 0 \\ \Sigma X \dfrac{\partial X}{\partial u} = 0 \\ \Sigma X \dfrac{\partial X}{\partial v} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma X \left(\dfrac{\partial x}{\partial v} - QX \right) = 0 \\ \Sigma X \dfrac{\partial X}{\partial u} = 0 \\ \Sigma X \dfrac{\partial X}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

dalle quali si trae

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = a \dfrac{\partial X}{\partial u} + b \dfrac{\partial X}{\partial v} + PX \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \alpha \dfrac{\partial X}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial X}{\partial v} + QX, \end{cases}$$

ed analoghe in y e z. Per determinare a, b, α, β basta valersi delle funzioni fondamentali di Kummer [1]:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = e, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = f, \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = f', \quad \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = g$$

$$\Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \Sigma \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \quad \Sigma \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G;$$

si trovano allora facilmente le formule seguenti:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{eG - f'F}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{f'E - eF}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial v} + PX \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{fG - gF}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{gE - fF}{EG - F^2}\dfrac{\partial X}{\partial v} + QX. \end{cases}$$

2. La forma quadratica

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

rappresentando l'elemento lineare sferico, si ha per cose note

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= a_1\frac{\partial X}{\partial u} + a_2\frac{\partial X}{\partial v} - EX \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} &= b_1\frac{\partial X}{\partial u} + b_2\frac{\partial X}{\partial v} - FX \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= c_1\frac{\partial X}{\partial u} + c_2\frac{\partial X}{\partial v} - GH, \end{aligned}$$

ove le a, b, c con gl'indici stanno in luogo dei noti simboli di Christoffel. Valendosi di queste formule, è assai facile determinare le condizioni d'integrabilità delle (2). Si trova, dopo qualche semplificazione, che esse si riducono alle tre seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial v} - \dfrac{\partial Q}{\partial u} = f' - f \\ \dfrac{\partial e}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial u} = b_1 e + d_2 f' - a_1 f - a_2 g + EQ - FP \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} - \dfrac{\partial f'}{\partial v} = b_2 g + b_1 f - c_2 f' - c_1 e - GP - FQ, \end{cases}$$

le quali generalizzano le formule di Codazzi relative alle superficie [2].

3. Le formule (2) e (3) permettono di trattare molti problemi fondamentali della teoria delle congruenze. Da esse si deduce subito il seguente

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 245.

[2] M'accorgo che queste formole sono state già indicate. Cesàro, *Geometria intrinseca.*

teorema fondamentale: *Date due funzioni* $P(u,v)$, $Q(u,v)$ *e due forme quadratiche*

$$e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$
$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

delle quali la seconda positiva e a curvatura $+1$, *tali che le* (3) *siano soddisfatte, esiste una sola congruenza che ammette quelle due forme rispettivamente per* 1^a *e* 2^a *forma fondamentale. Le* X, Y, Z *si ottengono integrando una equazione di Riccati, e la superficie iniziale è definita dalle* (2) *per mezzo di quadrature.*

4. Come applicazione di queste formule, prenderò a trattare il nuovo problema seguente: *Determinare le congruenze con assegnata immagine sferica delle rigate medie.* Io chiamo *rigate medie* la doppia famiglia di rigate della congruenza che hanno le linee di stringimento sulla *superficie media.* Esse godono di due proprietà, che enuncio soltanto:

a) La loro immagine sferica è un sistema ortogonale.

b) I piani tangenti a due di esse nel punto medio della generatrice comune (piani perpendicolari) sono i piani bisettori dei piani focali e dei piani principali.

Prendiamo per superficie iniziale la superficie media della congruenza e siano $u=\text{cost}$, $v=\text{cost}$ le due famiglie di rigate medie. Si avrà evidentemente

$$F=0 \qquad e=0 \qquad g=0,$$

per cui le (2) diventano

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{f'}{G}\dfrac{\partial X}{\partial v} + PX \\[2ex] \dfrac{\partial x}{dv} = \dfrac{f}{E}\dfrac{\partial X}{\partial u} + QX. \end{cases}$$

Le funzioni P e Q si ricavano dalle due ultime delle (3); si ottiene:

$$P = \frac{1}{G}\left\{c_2 f' - b_1 f - \frac{\partial f'}{\partial v}\right\} = \frac{1}{G}\left\{f'\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{G}) - f\frac{\partial}{\partial v}(\log\sqrt{E}) - \frac{\partial f'}{\partial v}\right\}$$

$$Q = \frac{1}{E}\left\{a_1 f - b_2 f' - \frac{\partial f}{\partial u}\right\} = \frac{1}{E}\left\{f\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{E}) - f'\frac{\partial}{\partial u}(\log\sqrt{G}) - \frac{\partial f}{\partial u}\right\}$$

Scrivendo ora che la prima delle (3) è verificata per queste espressioni di P e Q, si trova che le funzioni f ed f' devono soddisfare la condizione seguente:

$$(5)\quad \frac{1}{E}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{3}{2}\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{E}{G}\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial v} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\frac{1}{E}}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{G}\frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial v}\right) + 1\right]f =$$

$$= \frac{1}{G}\frac{\partial^2 f'}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{G}{E}\frac{\partial\frac{1}{G}}{\partial u}\frac{\partial f'}{\partial u} + \frac{3}{2}\frac{\partial\frac{1}{G}}{\partial v}\frac{\partial f'}{\partial v} + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2\frac{1}{G}}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{E}\frac{\partial\frac{1}{G}}{\partial u}\right) + 1\right]f'.$$

Di qui risulta che il problema proposto ammette una grande arbitrarietà nella soluzione. Si può fissare f' o f, e determinare f o f' integrando una equazione lineare del 2^o ordine del tipo parabolico. Le (4) definiscono per quadrature la superficie media delle congruenze cercate.

5. Siano $x_1 = x_1(u, v)$, $y_1 = y_1(u, v)$, $z_1 = z_1(u, v)$ l'equazioni di una superficie S_1 riferita alle linee di curvatura, le quali abbiano la stessa immagine sferica delle rigate medie di una congruenza. La congruenza sarà definita dalle formule precedenti, e per la superficie S_1 si avrà

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = 0$$

$$\Sigma X \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0 \qquad \Sigma X \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 .$$

Posto

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = -D , \quad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = -D'' ,$$

dalle (4) si ricava:

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \qquad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

$$\Sigma \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\left(f'\frac{D''}{G} + f\frac{D}{E}\right) = f'r_1 + fr_2 ,$$

essendo r_1 ed r_2 i raggi di curvatura di S_1. Se quindi si prendono f ed f' in guisa che insieme alla (5) sia anche soddisfatta la condizione

$$f'r_1 + fr_2 = 0 , \tag{6}$$

la superficie media della congruenza corrisponderà alla S_1 per ortogonalità d'elementi.

Questa osservazione dimostra nuovamente l'intimo legame che esiste fra la teoria delle congruenze rettilinee e quella delle deformazioni infinitesime. Si vede che la determinazione delle superficie che corrispondono ad S_1 per ortogonalità d'elementi *equivale alla determinazione delle congruenze, le cui rigate medie hanno la stessa immagine sferica delle linee di curvatura di* S_0, *e per le quali sia soddisfatta la condizione* (6).

6. Le formule (2) e (3), che sono utilissime in una grande classe di problemi, non si prestano per lo studio delle deformazioni delle congruenze, intese nel senso di Beltrami [1]. Per tale scopo occorre esprimere le sette funzioni di Kummer mediante i coefficienti delle due forme fondamentali della superficie iniziale e le due funzioni P e Q, come ha fatto il Prof. Bianchi nelle sue recenti ricerche [2].

[1] Le deformazioni che si ottengono flettendo la superficie iniziale e immaginando che le rette della congruenza siano ad essa invariabilmente legate.

[2] *Sulla teoria della deformazione delle superficie di rivoluzione.* Rend. R. Accademia dei Lincei, febbraio 1899.

Limitandoci alle congruenze normali, prendiamo a linee $u = \cos t$ sulla superficie (I) le traiettorie ortogonali alle rette della congruenza, e diciamo $v = \cos t$ le linee ortogonali ad esse. Allora, indicando con σ l'angolo variabile che le rette della congruenza fanno colla normale alla superficie (I), l'elemento lineare assume la forma

$$(7) \qquad ds^2 = \frac{du^2}{\cos^2\sigma} + G_1\, dv^2 ,$$

mentre la seconda forma fondamentale sarà

$$D\, du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2 .$$

Ciò posto, per giungere alle formule cercate basta seguire la via indicata dal prof. Bianchi. Ma se s'introducono fin dai primi calcoli le tre funzioni:

$$(8) \qquad p = -\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + D\cos\sigma\right), \quad q = -\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}\cos\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{D'}{\sqrt{G_1}}\right),$$

$$r = \frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u} - \frac{D''}{\sqrt{G_1}}$$

si ottengono con facilità le formule seguenti assai semplici:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} E &= p^2 + q^2 \operatorname{sen}^2\sigma \\ F &= pq\sqrt{G_1}\cos\sigma + qr\operatorname{sen}^2\sigma \\ G &= q^2 G_1 \cos^2\sigma + r^2\operatorname{sen}^2\sigma \end{aligned} \right. \qquad (9') \left\{ \begin{aligned} e &= p \operatorname{tang}\sigma \\ f &= f' = q\sqrt{G_1}\operatorname{sen}\sigma \\ g &= r\sqrt{G_1}\operatorname{sen}\sigma \end{aligned} \right.$$

Dalle (9') risulta che si possono sostituire le funzioni e, f, g alle p, q, r. Tale sostituzione è vantaggiosa, poichè le formule (9) diventano

$$\begin{aligned} E &= e^2 \cot^2\sigma + f^2\frac{1}{G_1} \\ F &= ef \cot^2\sigma + fg\frac{1}{G_1}, \\ G &= f^2 \cot^2\sigma + g^2\frac{1}{G_1} \end{aligned}$$

e per conseguenza le due forme fondamentali della congruenza si riducono alle seguenti:

$$\begin{aligned} d\varrho^2 &= \cot^2\sigma\,(e du + f dv)^2 + \frac{1}{G_1}(f du + g dv)^2 \\ \psi &= e du^2 + 2f\, du\, dv + g dv^2 . \end{aligned}$$

Le funzioni e, f, g soddisfano a tre equazioni, le quali si ottengono da quelle di Codazzi e di Gauss, sostituendo alle D, D', D'' le espressioni definite dalle (8) e (9'). Tali equazioni sono alquanto complicate, ma importa notare quella che si deduce dal teorema di Gauss, giacchè permette di esprimere $eg - f^2$ linearmente per e, f, g:

$$eg - f^2 + g \operatorname{tang} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u} - e \frac{\cos^2 \sigma}{2} \frac{\partial G_1}{\partial u} - 2f \operatorname{tang} \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v} = G_1 \operatorname{tang}^2 \sigma \,.\, K_1 + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial G_1}{\partial u} \cot \sigma \frac{\partial \sigma}{\partial u} + \frac{1}{\cos^2 \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v} \right)^2.$$

K_1 è la curvatura di (I). Da quanto si è detto possiamo concludere: note tre funzioni e, f, g che soddisfano le equazioni ora accennate, le (10) definiscono (insieme alle funzioni σ e G_1 che restano sempre le stesse) una congruenza che si deduce dalla data per deformazione.

7. Le espressioni di $EG - F^2$ e $Eg - 2fF + Ge$ si calcolano immediatamente; si trova

$$EG - F^2 = \frac{\cot^2 \sigma}{G_1} (eg - f^2)^2, \quad Eg - 2fF + Ge = (eg - f^2)\left(e \cot^2 \sigma + \frac{g}{G_1} \right),$$

quindi $\dfrac{Eg - F^2}{(eg - f^2)^2}$ è un invariante rispetto alle deformazioni considerate.

Indichiamo con K e H le due curvature (totale e media) della superficie (S) normale alle rette della congruenza e definita dalle equazioni

$$\xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ; \quad (t = -U + C)$$

con D_1, D_1', D_1'' i coefficienti della seconda forma fondamentale di S. Si ricava

$$-D_1 = e + tE, \quad -D_1' = f + tF, \quad -D_1'' = g + tG,$$

e quindi

$$\frac{1}{K} = \frac{G_1 \operatorname{tang}^2 \sigma}{eg - f^2} + \frac{G_1 \operatorname{tang}^2 \sigma \left(e \cot^2 \sigma + \dfrac{g}{G_1} \right)}{eg - f^2} t + t^2$$

$$H = - \frac{\left(e \cot^2 \sigma + \dfrac{g}{G_2} \right) + 2t \dfrac{\cot^2 \sigma}{G_1} (eg - f^2)}{1 + t\left(e \cot^2 \sigma + \dfrac{g}{G_1} \right) + t^2 \dfrac{\cot^2 \sigma}{G_1} (eg - f^2)}.$$

Come si vede, le e, f, g entrano in queste espressioni per le combinazioni $eg - f^2$, $e \cot^2 \sigma + \dfrac{g}{G_1}$.