ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

Matematica. — *Un teorema sulle varietà algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in sè.* Nota del prof. GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

È noto che ogni curva algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo ∞^1 di trasformazioni proiettive in sè, è razionale. E così pure è razionale ogni superficie algebrica, la quale ammetta un gruppo continuo *transitivo* (e perciò almeno ∞^2) di trasformazioni proiettive (¹).

In questa Nota io mi propongo di dimostrare che anche per le varietà algebriche a tre dimensioni sussiste la proposizione analoga alle precedenti; vale a dire che *È razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni, la quale ammetta un gruppo continuo transitivo* (e quindi almeno ∞^3) *di trasformazioni proiettive* (²).

Ci varremo a tal uopo della proposizione seguente: *È razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni la quale contenga una congruenza razionale e del 1º ordine di curve razionali, dotata di superficie unisecante* (questa superficie potendo anche ridursi a una linea, ovvero a un solo punto). Una tal varietà può infatti rappresentarsi birazionalmente sullo spazio S_3, riferendo la congruenza considerata a una stella di rette di questo spazio, e rappresentando ogni curva di quella congruenza sul raggio corrispondente di questa stella, in modo che alla superficie unisecante della congruenza corrisponda il centro della stella (³).

Sia dunque V una varietà algebrica a tre dimensioni, G un gruppo proiettivo dello spazio a cui questa varietà appartiene; e supponiamo che il gruppo G trasformi in sè questa varietà, e sia transitivo rispetto ad essa.

(¹) Enriques, *Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse* (Atti del R. Ist. Veneto, ser. 7ª, t. IV e V, 1893); Fano, *Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni proiettive in sè stesse* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1º sem., 1895).

(²) La determinazione, già effettuata, di tutti i *tipi* di gruppi cremoniani continui dello spazio S_3 (Enriques-Fano, *I gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio.* Annali di Matem., ser. 2ª, t. XXVI; Fano, *I gruppi di Jonquières generalizzati.* Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. XLVIII, 1897-98) permetterà perciò di assegnare anche per le varietà algebriche a tre dimensioni con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè, un numero finito (e precisamente = 16) di tipi determinati, tali che quelle varietà possano tutte riferirsi birazionalmente a una di queste ultime, in modo che si conservi il carattere proiettivo delle loro trasformazioni.

(³) Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica* $f(x\,y\,z) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri* (Math. Ann., t. XLIX, pag. 20).

Sia anzitutto G un gruppo *integrabile* (1). Esso contiene allora almeno un sottogruppo invariante ∞^1, il quale in questo caso può supporsi (al pari di G) algebrico (2), e avrà perciò traiettorie algebriche e anzi razionali γ. Queste traiettorie formeranno sopra V una congruenza (algebrica) del 1° ordine, invariante rispetto a G, e dotata altresì di superficie unisecante; perchè i punti uniti che il gruppo ∞^1 considerato ha sopra una qualunque delle γ devono descrivere al variare di questa curva, se distinti, due luoghi (superficie, curve, . .) anche distinti, ciascuno unisecante le γ medesime (3). E se quei due punti uniti coincidessero sopra ogni γ, si avrebbe un luogo unico, anche unisecante le γ. Rimane perciò soltanto a vedere se la congruenza delle γ sia razionale.

Ora, dall' esistenza di questa varietà unisecante le γ, si deduce immediatamente che sopra V esistono anche infinite superficie e sistemi lineari di superficie unisecanti le stesse γ. Costruendo pertanto un sistema lineare di tali superficie, il quale sia altresì semplice (4) e invariante rispetto a G (e ve ne saranno certo infiniti), noi potremo rappresentare birazionalmente V sopra un' altra varietà V′, sulla quale *alle* γ *corrisponderanno rette* c, *e al gruppo* G *corrisponderà un gruppo anche proiettivo*. Questo nuovo gruppo opererà dunque *proiettivamente* e *transitivamente* sulla conguenza delle *c*; e quest' ultima potrà perciò concepirsi come una superficie algebrica con un gruppo proiettivo transitivo di trasformazioni proiettive in sè. Essa sarà dunque razionale, e razionale sarà pure la congruenza delle γ su V (5).

Supponiamo ora che il gruppo G sia *non integrabile*. Esso contiene allora almeno un sottogruppo ∞^3 semplice (6); ed è noto che entro un tal gruppo ogni sottogruppo ∞^1 è algebrico (7). Il gruppo G conterrà perciò ancora dei sottogruppi ∞^1 algebrici; e le traiettorie di questi gruppi saranno ancora curve razionali, formanti congruenze del 1° ordine dotate di superficie unisecanti. Queste congruenze potrebbero tutte coincidere; e per quest' unica congruenza, che sarebbe invariante rispetto a G, si potrebbe allora ripetere il

(1) Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, p. 265; vol. III, p. 679-81.

(2) Enriques-Fano, Mem. cit., § 9.

(3) Enriques-Fano, Mem. cit., § 7.

(4) Tale cioè che le superficie di esso passanti per un punto generico di V non passino di conseguenza per altri punti variabili col primo.

(5) Questo ragionamento può estendersi, per induzione completa, al caso di una varietà algebrica a un numero qualunque di dimensioni, la quale ammetta un gruppo continuo, transitivo, integrabile di trasformazioni proiettive in sè.

(6) Lie, op. cit., vol, III, p. 757. Cfr. anche Engel, *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie*, II (Leipz. Ber., 1887).

(7) Ciò risulta immediatamente dalle equazioni generali di un gruppo proiettivo semplice ∞^3, che si trovano nel § 3 della mia Memoria: *Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè* (Mem. della R. Acc. di Torino, ser. 2ª, t. XLVI, 1895-96).

ragionamento di poc' anzi. In caso contrario, si considerino due diverse Γ e Γ' fra queste congruenze, e si indichino con γ e γ' due loro curve generiche. Le γ che si appoggiano a una stessa γ' (o viceversa) formeranno una serie ∞^1 *razionale;* esse incontrano infatti questa γ' (o γ) secondo gruppi di punti tali, che un punto di quest' ultima curva individua completamente la γ (o γ') che lo contiene, e quindi anche il gruppo della serie considerata su γ' (o γ) cui esso appartiene; sicchè questa serie di gruppi di punti (che è evidentemente algebrica) sarà un' involuzione, e perciò razionale.

Noi possiamo così costruire infinite superficie F, ciascuna delle quali conterrà una serie razionale ∞^1 di curve γ (tutte quelle che si appoggiano a una data γ'); e di queste F ne avremo una doppia infinità, ovvero soltanto una semplice infinità, secondo che le γ appoggiantisi a una γ' generica non incontrano oppure incontrano in conseguenza anche infinite altre di queste curve.

Nel primo caso per ogni γ passeranno ∞^1 superficie F; e queste formeranno anche una serie razionale σ, perchè conterranno rispettivamente le singole γ' appoggiantisi a quella γ, ovvero i gruppi di un' involuzione in questa serie di γ' (che è razionale). Considerando pertanto la congruenza Γ come una superficie, e le serie ∞^1 di γ contenute rispettivamente nelle F di una serie σ come curve di questa superficie, la Γ ci apparirà come *una superficie contenente una serie razionale* ∞^1 *di curve razionali.* E una tale superficie è sempre razionale (1).

Per giungere alla stessa conclusione nel secondo caso, quando cioè vi è soltanto una semplice infinità di superficie F, basterà dimostrare che è razionale questa serie ∞^1. Ora, anzitutto le ∞^1 superficie F formano un fascio, ossia per un punto generico di V ne passa una sola: quest' una deve infatti contenere la (unica) γ passante per questo punto, e quindi tutte le γ' che si appoggiano a questa γ; è dunque completamente individuata. Di più, se esiste su V una congruenza Γ'' analoga a Γ e Γ', le cui linee γ'' non stiano sulle F, il fascio delle F dovrà segare ciascuna di queste γ'' (che sono curve razionali) in gruppi di un' involuzione, e sarà perciò anche razionale. Se invece lo stesso fascio appartiene a tutte le altre congruenze analoghe a Γ e Γ', esso (come unico del suo tipo) sarà necessariamente invariante rispetto al gruppo proiettivo G; e questo gruppo, transitivo rispetto alla varietà V, dovrà operare su di esso in modo almeno ∞^1: di qui segue appunto la razionalità del detto fascio.

Osserviamo a tal uopo che una serie continua qualsiasi σ di varietà algebriche F di uno spazio S_r può sempre considerarsi come una varietà μ di uno spazio opportuno, tale che alle eventuali collineazioni di S_r le quali mutino la serie σ in sè stessa corrispondano sopra μ trasformazioni anche pro-

(1) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1894).

iettive. Ciascuna delle F può infatti considerarsi come intersezione completa di un certo numero di varietà algebriche M_{r-1} di S_r; quindi anche come intersezione di un certo numero (eventualmente anche superiore) di M_{r-1} *di uno stesso ordine n* (abbastanza grande), e perciò ancora come varietà base del sistema lineare di $M_{r-1}{}^n$, così individuato. Alle F noi sostituiamo così dei *sistemi lineari di varietà* $M_{r-1}{}^n$, i quali possono concepirsi come spazi minori S_k (per un certo valore di k) entro lo spazio di dimensione

$$R = \binom{n+r}{r} - 1$$

formato da tutte le $M^n{}_{r-1}$ di S_r, e quindi anche come *punti* dello spazio di dimensione $\binom{R+1}{k+1} - 1$ a cui appartiene l'insieme di tutti quegli S_k. E in queste rappresentazioni verrà sempre conservato il carattere proiettivo delle collineazioni considerate in S_r [1].

Il fascio di superficie F dianzi considerato si può dunque concepire come una curva algebrica con (almeno) ∞^1 trasformazioni proiettive in sè; esso è quindi razionale, come appunto si voleva dimostrare.

Cristallografia. — *Sopra alcuni minerali italiani.* Nota di C. Viola, presentata dal Socio Blaserna.

IV. *Ortoclasia del granito di Calabria.*

Già fin dalla mia prima gita in Calabria, nel 1890, raccolsi nel granito presso Paola dei cristalli trasparenti di ortoclasia, che ora si presentano molto utili per una determinazione delle costanti ottiche col riflettometro totale di Abbe. Potei ottenere delle sezioni bene levigate secondo le due sfaldature (010) e (001).

Anche per questo lavoro trovai aiuto nel Sig. Giuseppe Scalfaro, al quale faccio i miei più sinceri ringraziamenti.

Con la prima sezione ebbi le seguenti differenze rispetto al limite della riflessione totale per l'indice ω del quarzo:

[1] Quest'osservazione permetterebbe anche di abbreviare leggermente l'ultima parte del ragionamento relativo al caso di un gruppo G integrabile.