# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 22 gennaio 1899.*

A. Messedaglia Vicepresidente.

## MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Dimostrazione semplice della sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione finita e ad un solo valore.* Nota del Socio straniero V. Voigt.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sulla rappresentazione approssimata di funzioni algebriche per mezzo di funzioni razionali.* Nota di E. Bortolotti, presentata dal Socio Cerruti.

Il metodo che ha dato Bernoulli, per il calcolo approssimato della radice reale di modulo massimo di una equazione numerica, è di facilissima applicazione, ed avrebbe grande utilità pratica quando si avesse modo di verificare, a priori, l' esistenza di una radice di modulo massimo e si conoscessero i limiti dell' errore.

Dimostrerò ora che: vi sono equazioni algebriche per le quali, fuori di un cerchio di raggio determinato, esiste sempre una radice di modulo massimo, e che questa può, col metodo di Bernoulli, essere rappresentata da frazioni razionali, sempre più approssimate alla radice stessa; nel senso che gli sviluppi in serie di potenze di $\frac{1}{t}$, di questa e di quelle, hanno un numero, sempre crescente, di termini comuni.

Proverò ancora che: la successione di quelle frazioni razionali tende alla radice in modo uniforme lungo circonferenze concentriche; e troverò, nel senso superiormente indicato, i limiti degli errori.

Poichè la presente comunicazione fa seguito ad una Nota « *Sulla convergenza delle frazioni continue algebriche* », presentata insieme con questa all'Accademia, non parlerò quì che di equazioni del 2° grado; ma i risultamenti saranno immediatamente estendibili anche ad equazioni di grado superiore, ciò che del resto ho dimostrato in una Nota preventiva, che è in corso di stampa coi tipi di G. Civelli in Bologna.

Per classi, abbastanza estese, di equazioni alle quali non sarebbe applicabile il metodo di Bernoulli, troverò un altro metodo, altrettanto facile e rapido, di risoluzione approssimata.

Farò poi risaltare le relazioni fra questo metodo e quello, esposto dal Lagrange, che dà lo sviluppo di una irrazionale numerica del 2° grado, in frazione continua periodica.

Darò ancora una dimostrazione, molto semplice, del teorema di Lagrange, ed in fine, estenderò al calcolo della radice quadra approssimata di un polinomio razionale, alcuni metodi dati fino ad ora solo per le radici quadrate dei numeri.

1. Sia la forma alle differenze:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A}(y) = y_{x+2} + \sum_{h=0}^{r} a_h t^{r-h} \, . \, y_{x+1} + \sum_{k=1}^{r} b_k t^{r-k} \, . \, y_x$$

e supponiamo che i coefficienti $a_h, b_k$, sieno tutti costanti rispetto ad $x$.

In questo caso, se $\psi_x(t)$ è integrale di $\mathrm{A}(y)$, lo è anche $\psi_{x+1}(t)$; ed allora, se in un punto $x_0$ è: $|\psi_{x_0}| < |\psi_{x_0+1}|$, per quanto è stato dimostrato al n. 4 della Nota precedente, *il limite, per $x$ che tende all'infinito, del rapporto* $\frac{\psi_{x+1}(t)}{\psi_x(t)}$ *sarà una funzione analitica della $t$, regolare fuori di un cerchio di raggio determinato*. Posso ora aggiungere che, *fuori di quel cerchio, rappresenta la radice di modulo massimo della equazione algebrica*:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{X}^2 + a(t)\,\mathrm{X} + b(t) = 0$$

$$a(t) = \sum_{h=0}^{r} a_h t^{r-h} \, , \quad b(t) = \sum_{k=1}^{r} b_k t^{r-k} .$$

Ed invero, se $\alpha, \beta$ sono le radici, in ordine di modulo non crescente, si ha identicamente [1]:

$$\text{(3)} \qquad \psi_x = k_1 \alpha^x + k_2 \beta^x$$

[1] Cfr. Lagrange, Opere, t. I, pag. 24: *Sur l'intégration* . . .

con $k_1$ e $k_2$ costanti rispetto ad $x$. Di qui:

$$(4)\qquad \frac{\psi_{x+1}}{\psi_x}=\frac{k_1\alpha^{x+1}+k_2\beta^{x+1}}{k_1\alpha^x+k_2\beta^x}=\alpha\,\frac{k_1+k_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x+1}}{k_1+k_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x}}\,.$$

Ma, dalla condizione:

$$(5)\qquad |a|>\mu\,|b|$$

che, per qualunque $\mu$, sappiamo (Nota preced. n. 3) esser soddisfatta fuori di un cerchio determinato $(\mathrm{R}_\mu)$, si ha:

$$|\alpha|+|\beta|>\mu\,|\alpha|\,.\,|\beta|\,;$$

ed in conseguenza

$$(6)\qquad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<\frac{1}{\mu-1}\,.$$

Basta dunque che sia $\mu=2+\eta$ perchè si possa dedurre che: *in tutti i punti fuori del cerchio* $(\mathrm{R}_\mu)$ *esiste una radice di modulo massimo*; e, in conseguenza delle (6) e (4), sarà:

$$(7)\qquad \lim_{x=\infty}\frac{\psi_{x+1}(t)}{\psi_x(t)}=\alpha(t)\,.$$

Convengono in questo risultamento il citato teorema di Bernoulli ed un noto teorema di Poincaré [1].

2. Se alla $\psi_x$ si attribuiscono i valori iniziali:

$$-\psi_0=1\;,\quad -\psi_1=a(t)\;,\quad -\psi_2=a^2(t)+b\;\ldots$$

cioè: se si prende per $\psi_x$ il numeratore della ridotta di ordine $x$ nella frazione continua:

$$(8)\qquad -a(t)-\cfrac{b(t)}{a(t)-\cfrac{b(t)}{a(t)-\cdots}}\;;$$

ricordando quanto si è visto al n. 4 della Nota precedente, avremo:

$$(9)\qquad \left|\alpha-\frac{\psi_{x+1}(t)}{\psi_x(t)}\right|<\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|\sum_{n=x}^{\infty}\left\{\frac{|b(t)|}{|a(t)|-|b(t)|}\right\}^n$$

$$<\left|\frac{b(t)}{a(t)}\right|\frac{|b(t)|^x}{(|a(t)|-|b(t)|)^{x-1}}\,\frac{1}{|a(t)|-2\,|b(t)|}\,.$$

[1] American Journal, t. VII.

Se poniamo che il grado di $a(t)$ superi quello di $b(t)$ per $\nu$ unità, il secondo membro risulta del grado $-\nu(x+1)$ in $t$; d'altra parte $\psi_x$ è il denominatore della ridotta di cui il numeratore è $\psi_{x+1}$; concludiamo dunque:

*La frazione continua* (8), *per tutti i punti situati fuori di un cerchio determinato* ($R_2$), *quando il grado di* $a(t)$ *sia di* $\nu$ *unità* ($\nu \geqq 1$) *superiore a quello di* $b(t)$, *converge verso la radice* $\alpha$ *di modulo massimo della equazione algebrica* $X^2 + a(t)\, X + b(t) = 0$.

*La ridotta di indice* $x$ *di questa frazione continua, sviluppata in serie di potenze di* $\frac{1}{t}$, *ha tutti i suoi termini, fino a quello di ordine* $-\nu(x+1)$, *coincidenti con lo sviluppo di* $\alpha(t)$.

3. L'equazione:

$$a(t)\, X^2 + b(t)\, X - c(t) = 0\,, \tag{10}$$

mediante la sostituzione $X = \frac{Y}{a(t)}$, si trasforma nell'altra

$$Y^2 + b(t)\, Y - a(t)\,.\,c(t) = 0\,. \tag{11}$$

Se il grado di $b(t)$ non è superiore a quello di $a(t)\,.\,c(t)$, non si potrà applicare, con sicurezza, il metodo esposto ai numeri precedenti. L'equazione si può risolvere, per altro, con un metodo altrettanto rapido di approssimazione e per qualunque grado di $b(t)$, *ogni qualvolta il prodotto* $a\,.\,c$ *sia di grado pari.*

Si ponga infatti $b = b_1 - b_2$, con che l'equazione (10) diventa

$$aX^2 + b_1 X = b_2 X + c\,;$$

indicando con $y$ una radice, si avrà identicamente:

$$y = \frac{b_2 y + c}{ay + b_1} = \frac{b_2}{a} + \frac{c - \frac{b_1 b_2}{a}}{ay + b_1} \tag{12}$$

e di qui:

$$ay = b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cdots}}\,. \tag{13}$$

Basterà, ora, che le $b_1$ e $b_2$ sieno determinate in modo che il grado di $b_1 + b_2$, rispetto a $t$, sia superiore a quello di $ac - b_1 b_2$, perchè si possa asserire che la frazione continua al secondo membro tende uniformemente alla radice $\alpha$ di modulo massimo della equazione:

$$X^2 + (b_1 + b_2)\, X + (ac - b_1 b_2) = 0\,. \tag{14}$$

Si avrà poi una delle radici della data, ponendo:

$$y = \frac{b_2 + \alpha}{a}\,.$$

Questo metodo sarà tanto più rapido, quanto maggiore è la differenza fra il grado di $b_1 + b_2$ e quello di $ac$.

Se il grado di $ac$ è $2n$, posto che sia $b = \sum_{h=0}^{m} b_h t^{m-h}$, basterà fare:

$$(15)\; b_1 = \sum_{h=0}^{m} \frac{1}{2}(c_h + b_h)t^{m-h} + \sum_{k=0}^{n-m-1} c_k t^{n-k}\,, \quad b_2 = \sum_{h=0}^{m} \frac{1}{2}(c_h - b_h)t^{m-h} + \sum_{k=0}^{n-m-1} c_k t^{n-k}$$

e disporre delle $n+1$ indeterminate $c_0, c_1 \ldots c_n$, per modo da fare annullare gli $n+1$ coefficienti dei termini più elevati della differenza $ac - b_1 b_2$, per ridurre questa ad essere di grado $n-1$ al più, mentre $b_1 + b_2$ è di grado $n$.

4. Mi propongo ora di vedere in quale relazione sieno le frazioni approssimate, che si ottengono col metodo esposto dianzi, con le ridotte della frazione continua periodica, in cui una irrazionale del 2° grado si svilupperebbe col metodo di Lagrange.

Supponendo che il grado di ciascuna delle $b$ sia superiore a quello della $a_x$ corrispondente, consideriamo la frazione periodica

$$(16) \qquad y = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cdots + a_{p-1} + \cfrac{b_0}{y}}$$

D' onde:

$$(17) \qquad Q_{p-1} y^2 + (b_0 Q_{p-2} - P_{p-1})\, y - b_0 P_{p-2} = 0\,.$$

Ora, sviluppando, col metodo esposto ai numeri precedenti, una delle radici $y$ della equazione (17), si avrebbe:

$$Q_{p-1} y = P_{p-1} + \cfrac{b_0(Q_{p-1} P_{p-2} - P_{p-1} Q_{p-2})}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cfrac{b_0(Q_{p-1} P_{p-2} - P_{p-1} Q_{p-2})}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cdots}}$$

od anche:

$$(18) \qquad \left\{ Q_{p-1} y = P_{p-1} + \cfrac{(-1)^p\, b_0 \,.\, b_1 \ldots b_{p-1}}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cfrac{(-1)^p\, b_0 \,.\, b_1 \ldots b_{p-1}}{b_0 Q_{p-2} + P_{p-1} + \cdots}} \right. .$$

Si consideri però che i numeratori ed i denominatori delle ridotte della (16) sono anche integrali della forma a coefficienti costanti [1]:

$$(19) \qquad \varphi_{x+2p} = (-1)^p\, b_0\, b_1 - b_{p-1}\, \varphi_x + (b_0 Q_{p-2} + P_{p-1})\, \varphi_{x+p}\,;$$

e che si potrebbero in forza di ciò, calcolare le ridotte di $p$ in $p$, senza pas-

[1] Cfr. il mio *Contributo alla teoria delle forme lineari alle differenze*, § V (Annali di Matematica 1895).

sare per le intermedie. Questo risultamento però è immediatamente conseguito applicando il metodo che ho esposto ai numeri precedenti, perchè la frazione continua (18) è appunto quella che sarebbe generata dalla forma (19).

Sostanzialmente dunque il metodo esposto consiste nel trasformare linearmente la radice cercata in una quantità sviluppabile in frazione continua, tale che la legge di formazione per ridotte consecutive sia costante; e sia quella medesima che si avrebbe, per ridotte congrue al modulo $p$, nello sviluppo della radice cercata.

5. Si abbia una equazione numerica:

$$ax^2 + 2bx - c = 0. \tag{20}$$

Dico che nello sviluppo:

$$ax = b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cfrac{ac - b_1 b_2}{b_1 + b_2 + \cdots}},$$

si può sempre supporre $ac - b_1 b_2 = 1$.

Ed infatti, dalle due: $b_1 - b_2 = 2b$, $b_1 b_2 = ac - 1$ si ricava:

$$b_1 = b + \sqrt{b^2 + ac - 1} \qquad b_2 = -b + \sqrt{b^2 + ac - 1}\,. \tag{21}$$

Poichè si ottiene una equazione equivalente alla data sostituendo ad $a$, $b$, $c$, numeri proporzionali $a' = ua$, $b' = ub$, $c' = uc$; la questione può ridursi a quella di determinare $u$ in guisa, che la quantità $\sqrt{u^2 b^2 + u^2 ac - 1}$ sia un quadrato perfetto. Si giunge così all'equazione Pelliana:

$$u^2(b^2 - ac) - t^2 = 1 \tag{22}$$

la cui soluzione non offre difficoltà.

6. Le formule trovate, al numero precedente, ci mettono sulla strada per dare una facile dimostrazione del teorema, dovuto a Lagrange, che: *un irrazionale di 2° grado si sviluppa in frazione continua periodica* (1).

Sia infatti $y$ radice della (20), onde

$$y = \mathrm{S}(y) = \frac{b_2 y + c}{ay + b_1}\,, \quad \text{con} \begin{vmatrix} b_2 & c \\ a & b_1 \end{vmatrix} = -1. \tag{23}$$

Sia X il quoziente completo di ordine $n$ nello sviluppo di $y$ in frazione continua; avremo:

$$y = \mathrm{T}(\mathrm{X}) = \frac{\mathrm{P}_n \mathrm{X} + \mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{Q}_n \mathrm{X} + \mathrm{Q}_{n-1}}\,. \tag{24}$$

(1) Quella data da Emma Bortolotti nel tomo IX dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, non è immediatamente applicabile ad equazioni numeriche.

Da cui

$$X = T^{-1}\,ST(X) = \frac{AX + B}{CX + D} \tag{25}$$

$$\left\{\begin{aligned}
A &= Q_{n-1}\,Q_n\left(a\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\frac{P_n}{Q_n} + b_1\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - b_2\frac{P_n}{Q_n} - c\right)\\
B &= Q^2_{n-1}\left(a\frac{P^2_{n-1}}{Q^2_{n-1}} + (b_1 - b_2)\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - c\right)\\
C &= -\,Q^2_n\left(a\frac{P^2_n}{Q^2_n} + (b_1 - b_2)\frac{P_n}{Q_n} - c\right)\\
D &= -\,Q_{n-1}Q_n\left(a\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\frac{P_n}{Q_n} + b_1\frac{P_n}{Q_n} - b_2\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - c\right)
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

I trinomi fra parentesi, nelle espressioni di B e di C, hanno segni contrarî perchè $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ e $\frac{P_n}{Q_n}$ comprendono una radice; i due numeri B e C, hanno dunque lo stesso segno.

Si ha poi

$$\frac{A}{B} = \frac{Q_n}{Q_{n-1}}\left(1 + \frac{a\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - b_2}{a\dfrac{P^2_{n-1}}{Q^2_{n-1}} + (b_1 - b_2)\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - c}\quad\frac{(-1)^n}{Q_n\,Q_{n-1}}\right).$$

Per una nota proprietà delle ridotte, $(-1)^n$ ed il trinomio a denominatore hanno il medesimo segno; si ha poi, dalle (21): $y > \frac{b_2}{a}$; dunque, se $n$ è abbastanza grande; $a\,\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > b_2$; dunque $A > B$.

Analoga dimostrazione può farsi per C e D. I quattro numeri A, B, C, D sono dunque tutti positivi. Si ha poi: $AD - BC = \pm 1$. Cioè *i numeri* $\frac{A}{C}$ e $\frac{B}{D}$ *sono ridotte consecutive nello sviluppo di* X *in frazione continua.*

La formula (24) ci dimostra allora che X *è un quoziente completo nello sviluppo di* X *stesso in frazione continua.*

7. Come applicazione dei metodi generali dati ai numeri precedenti, *si cerchi la radice quadrata di un polinomio intero di grado pari* A.

Dovendo risolvere l' equazione

$$X^2 - A = 0\,, \tag{27}$$

faremo: $b_h = 0$ $(h = 1\,.\,2\,...)$ nelle formule (15), e troveremo così un polinomio $b$ di grado $n$ tale che la differenza $A - b^2$ sarà di grado $n - 1$ al più. La formula (13) si trasformerà allora nella seguente:

$$X = b + \cfrac{A - b^2}{2b + \cfrac{A - b^2}{2b + \cdots}}\;; \tag{28}$$

analoga a quella trovata da Cataldi (1) per il caso che A sia un numero intero.

8. Si consideri l'operazione iterativa

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{A}{a_{n-1}}\right). \tag{29}$$

Posto che esista il $\lim\limits_{n=\infty} a_n = y$, sarà (2)

$$y = \frac{1}{2}\left(y + \frac{A}{y}\right), \quad \text{cioè } y^2 = A.$$

Nella applicazione successiva della (29) consiste il metodo dato da Leonardo Pisano (3) per la estrazione approssimata di radice.

È noto però che se si fa $a_1 = b$, ($b$ essendo la radice a meno di una unità, e, nel caso dei polinomi, l'espressione calcolata al numero precedente), si ha che $a_n$ non differisce dalla ridotta $(2n-1)^{\text{esima}}$ della frazione continua (28) (4). La convergenza delle $a_n$ è dunque messa fuor di dubbio ed il metodo di Fibonacci si può applicare anche a polinomi di grado pari.

9. Finalmente, si possono ripetere le medesime considerazioni per la formula (5):

$$P_{n-1} - Q_{n-1}\sqrt{A} = (P_0 - Q_0\sqrt{A})^n. \tag{30}$$

**Matematica.** — *Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$.* Nota dell'ing. E. Almansi, presentata dal Corrispondente Volterra.

**Fisica.** — *Ricerche sul fenomeno residuo nei tubi a rarefazione elevata.* Nota di Alessandro Sandrucci, presentata dal Socio Blaserna.

Le precedenti due Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

(1) *Trattato ‖ del modo brevissimo ‖ di trovare la radice quadra delli numeri* ‖ di Pietro Antonio Cataldi, lettore delle scienze matematiche nello studio di Bologna; in Bologna MDCXIII (pag. 144). Fa meraviglia che il Günther nella sua *Storia dello sviluppo delle frazioni continue* non voglia riguardare il Cataldi come il *solo* scopritore di quel l'algoritmo, mentre cita le *Deliciae Physico-mathematicae* di Schwenter, stampata nel MDCLI, ed attribuisce quella scoperta anche a lord Brounker nato 7 anni dopo la pubblicazione del libro di Cataldi.

(2) Cfr. Farkas, *Sur les fonctions itératives*, Journal de Math. a. 1884.

(3) *Liber Abbaci*, Roma MDCCCLVII, pag. 353, 355.

(4) Serret, *Algèbre*, t. I, pag. 76; Moret-Blanc, Nouvelles Ann., t. XII.

(5) Serret, loc. cit.; Frattini, *Intorno al calcolo approssimato delle radici quadrate.* (Periodico di Mat., tom. XIII, 1898).