ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 febbraio 1899.

E. Beltrami Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Dimostrazione semplice della sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione angolare finita e ad un sol valore.* Nota del Socio straniero W. Voigt.

È nota la dimostrazione di Laplace [1] della sviluppabilità secondo funzioni sferiche di una funzione della direzione uscente da un punto fisso; essa riposa sopra una proprietà della funzione potenziale Newtoniana di uno sferoide omogeneo, infinitamente poco differente da una sfera. Questa proprietà è espressa dall'equazione:

$$\overline{V} + 2a\,\overline{\frac{\partial V}{\partial r}} + \frac{4\pi}{3}a^2 = 0\,, \tag{1}$$

in cui V indica la funzione potenziale dello sferoide, a il raggio di una sfera ad esso infinitamente vicina, r la distanza dal centro della sfera, e le quantità sopralineate si riferiscono alla superficie dello sferoide; la densità della massa contenuta nello sferoide è posta eguale all'unità.

Il processo dimostrativo consiste nel porre il raggio R dello sferoide sotto la forma

$$R = a(1 + \varepsilon F)\,, \tag{2}$$

in cui F denota una funzione qualsiasi, ma finita e ad un sol valore, della direzione uscente dal centro della sfera, ed ε una costante infinitesima, e nello

[1] *Mécanique céleste*, II, cap. 3, n. 10.

sviluppare poscia, nell' espressione di V, il valore reciproco della distanza fra un elemento di massa dello sferoide ed il punto variabile secondo potenze decrescenti di r. Con ciò l' equazione di sopra si riduce immediatamente ad un' espressione della funzione F in una serie che procede per funzioni sferiche.

Nasce ora spontanea l' idea di seguire nel caso del piano e del potenziale logaritmico la medesima via tenuta da Laplace per lo spazio e per il potenziale Newtoniano, al fine di giungere così ad una dimostrazione semplice — ed in ogni caso non inutile dal punto di vista didattico — della sviluppabilità di una funzione angolare in serie di Fourier. Se non che si cade per questa via nella difficoltà che la formola di Laplace può bensì, come ha dimostrato l' autore stesso, venire estesa a potenziali elementari, che sieno proporzionali a qualsiasi potenza della distanza, ma non è applicabile al potenziale logaritmico. Mi propongo ora di mostrare che per quest' ultimo vale una relazione di carattere un poco diverso, la quale permette nel piano la medesima applicazione, che viene offerta dalla relazione di Laplace nello spazio.

A questo scopo consideriamo un' area occupata da materia di densità ϱ, il cui contorno differisca infinitamente poco da una circonferenza di raggio a (circonferenza contigua) in modo che il raggio vettore che va ad esso venga rappresentato dalla formola (2) col medesimo significato dei simboli che vi compaiono. Allora la funzione potenziale logaritmica di quell' area materiale sopra di un punto esterno alla distanza r dal centro della circonferenza può venire considerata come la somma delle funzioni potenziali del cerchio e della striscia infinitamente sottile che rimane, ove si immagini tolto il cerchio stesso e che avrà densità ora positiva ora negativa, ossia si potrà porre:

$$\text{(3)} \qquad V = -\pi \varrho a^2 \operatorname{logn}(r^2) - \varepsilon \varrho a \int F \operatorname{logn}(e^2)\, ds\,,$$

in cui ds denota l' elemento lineare della circonferenza contigua, ed e la sua distanza dal punto variabile; infatti la striscia essendo infinitamente sottile, può venire sostituita da una distribuzione lineare. La (3) vale per qualsiasi posizione del centro del cerchio a, semprechè il suo contorno si scosti infinitamente poco dal contorno effettivo del disco.

Nel seguito noi attribuiremo però un valore invariabile al raggio a e per il momento anche una posizione speciale c' al centro, in modo che la circonferenza contigua tagli il raggio vettore r nel medesimo punto, ove lo taglia il contorno del disco. Nella figura la circonferenza a tratto continuo corrisponde alla posizione qualsiasi del centro c, quella punteggiata alla posizione ora specializzata del centro c'; p indica il punto variabile, e mentre la distanza cp è eguale ad r, la distanza $c'p$ è indicata con r'. In tali ipotesi si ha pure:

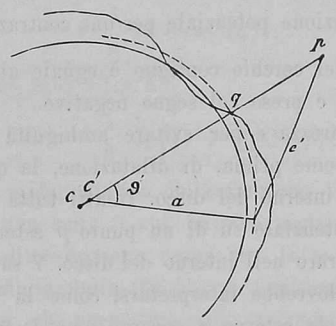
$$\text{(4)} \qquad V = -\pi \varrho a^2 \operatorname{logn}(r'^2) - \varepsilon \varrho a \int F' \operatorname{logn}(e'^2)\, ds\,,$$

in cui F′ è l'espressione corrispondente ad F, per il centro c', ed

$$e'^2 = a^2 + r'^2 - 2ar' \cos \vartheta' .$$

Per mezzo di una derivazione rispetto ad r', che corrisponde ad uno spostamento del punto p parallelamente ad r', ovvero ad r, si ottiene dalla (4):

$$\frac{\partial V}{\partial r'} = -\frac{2\pi\varrho a^2}{r'} - 2\varrho\varepsilon a \int F' \frac{r' - a\cos\vartheta'}{e'^2} ds . \tag{5}$$



All'incontro col derivare rispetto ad a, tenendo costante sia $\pi a^2 \varrho$, sia $a\varrho F' ds$ — ciò che corrisponde ad una dilatazione omogenea del disco, rimanendo costante la massa, a partire dal centro c' e del valore $\frac{da}{a}$ — si ottiene:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -2\varepsilon\varrho a \int F' \frac{a - r'\cos\vartheta'}{e'^2} ds . \tag{6}$$

Se ora si fa muovere il punto p sopra r' sino a cadere in q, nell'intersezione col contorno del disco, si ha $r' = a$ e le due equazioni precedenti danno per differenza:

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial r'}} - \overline{\frac{\partial V}{\partial a}} + 2\pi\varrho a = 0 . \tag{7}$$

Adesso potremo scambiare $\frac{\partial V}{\partial r'}$ con $\frac{\partial V}{\partial r}$, poichè le direzioni di r ed r' coincidono fra di loro, ed inoltre potremo, senza errore sensibile, considerare $\frac{\partial V}{\partial a}$ come l'effetto di una dilatazione omogenea a partire dal centro c, giacchè questa differisce da quella, che abbiamo prima considerata, solo per uno spostamento parallelo ad r e di valore $(cc')\frac{da}{a}$, che è infinitesimo del se-

condo ordine. In questo modo la formola è indipendente da ogni ipotesi speciale sulla posizione del centro c', e sussiste per una posizione qualsiasi c. Cosicchè otteniamo finalmente:

$$\overline{\frac{\partial V}{\partial r}} - \overline{\frac{\partial V}{\partial a}} + 2\pi a \varrho = 0, \tag{8}$$

donde il teorema che per un punto sul contorno del disco di densità ϱ, la componente $\overline{\frac{\partial V}{\partial r}}$ della forza verso il centro del cerchio contiguo, più la variazione $\overline{\frac{\partial V}{\partial a}}$ della funzione potenziale per una contrazione omogenea del disco rispetto al centro c del cerchio contiguo è eguale al raggio a del cerchio moltiplicato per $2\pi\varrho$ e preso col segno negativo.

Per maggior chiarezza e per evitare ambiguità preferiamo parlare di contrazione anzichè, come prima, di dilatazione, la quale ultima farebbe entrare il punto p nell'interno del disco. Infatti tutta la nostra deduzione riguarda la funzione potenziale su di un punto p esterno, e se per la deformazione p dovesse penetrare nell'interno del disco, V sarebbe sempre dato dalla stessa funzione, cioè dovrebbe interpretarsi come la continuazione analitica della funzione potenziale esterna e non già come la funzione potenziale sopra un punto interno.

Sostituiamo ora nell'equazione di partenza (3) in luogo di logn (e^2) la nota serie:

$$\operatorname{logn}(e^2) = \operatorname{logn}(r^2) - 2\sum_1^\infty \frac{1}{h}\left(\frac{a}{r}\right)^h \cos h(\varphi - \psi),$$

in cui φ indica l'angolo di r con una direzione fissa, e ψ l'angolo con questa del raggio a diretto verso ds. F è da considerarsi ora in (3) come funzione di ψ, e V come funzione di r e φ. Ponendo per brevità:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\psi)\cos h(\varphi - \psi)\, d\psi = G_h(\varphi), \tag{9}$$

V prende la forma:

$$V = -\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon G_0(\varphi)\right)\pi\varrho a^2 \operatorname{logn}(r^2) + \pi\varepsilon\varrho a^2 \sum_1^\infty \frac{1}{h}\left(\frac{a}{r}\right)^h G_h(\varphi). \tag{10}$$

Ne segue immediatamente:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon G_0(\varphi)\right)\frac{2\pi\varrho a^2}{r} - \pi\varepsilon\varrho a \sum_1^\infty \left(\frac{a}{r}\right)^{h+1} G_h(\varphi). \tag{11}$$

Inoltre poichè nella derivazione rispetto ad a deve rimanere costante sia la massa $\pi\varrho a^2$ del cerchio contiguo, sia la massa di ogni parte della

striscia di contorno, vicina all'elemento ds, cioè $\varrho a F ds = \varrho a^2 F(\psi) d\psi$, e quindi sarà pure costante $\varrho a^2 G_h(\varphi)$, avremo:

$$(12) \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = -\pi \varepsilon \varrho a \sum_1^\infty \left(\frac{a}{r}\right)^h G_h(\varphi).$$

Per ottenere il valore di $\frac{\partial V}{\partial r}$ e di $\frac{\partial V}{\partial a}$, bisognerebbe ora porre in (11) e (12) $r = a(1 + \varepsilon F(\varphi))$; ma notando che a causa della piccolezza di ε si può scambiare r con a nei termini proporzionali ad ε, e porre nei termini non proporzionali ad ε

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - \varepsilon F(\varphi)),$$

l'equazione (8) si riduce senz'altro a:

$$(13) \qquad F(\varphi) = \frac{1}{2} G_0(\varphi) + \sum G_h(\varphi),$$

ed esprime appunto la sviluppabilità della funzione V essenzialmente finita e ad un sol valore in una serie, i cui termini seguono la legge contenuta nella (9). La presente dimostrazione regge per tutte le funzioni F, per le quali la funzione V definita dalla (3) ha un significato determinato, quindi p. e. anche per funzioni, che presentino sulla circonferenza un numero finito di discontinuità; ma perde la sua validità, quando quella formola non ha senso, come avverrebbe p. e. per funzioni oscillanti infinite volte, per le quali non è d'altronde valido, come è noto, lo sviluppo in serie di Fourier.

Astronomia. — *Sulle macchie e facole solari osservate al R. Osservatorio del Collegio Romano nell'ultimo trimestre del 1898.* Nota del Socio P. Tacchini.

Presento all'Accademia i risultati delle osservazioni delle macchie e facole eseguite nel 4° trimestre del 1898. La stagione fu favorevole per questo genere di osservazioni, anzi può dirsi molto favorevole come nell'ultimo trimestre dell'anno precedente. Ecco i risultati ottenuti:

4° trimestre 1898.

Mesi	Numero dei giorni di osservazione	Frequenza delle macchie	Frequenza dei fori	Frequenza delle M+F	Frequenza dei giorni senza M+F	Frequenza dei giorni con soli fori	Frequenza dei gruppi di macchie	Media estensione delle macchie	Media estensione delle facole
Ottobre . . .	30	3,20	11,37	14,57	0,00	0,23	2,97	52,20	115,33
Novembre. .	23	3,22	9,04	12,26	0,04	0,00	2,83	22,91	70,00
Dicembre. .	25	1,04	1,80	2,84	0,32	0,04	0,96	13,92	61,60
Trimestre	78	2,51	7,62	10,13	0,12	0,10	2,28	31,30	84,74