ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 3 settembre 1899.

Matematica. — *Considerazioni sulle funzioni ordinate.* Nota del Corrisp. CARLO SOMIGLIANA.

I.

1. Si abbiano due gruppi di n numeri reali, finiti qualsiansi disposti in un certo ordine

$$M_1, M_2, \dots M_n$$
$$m_1, m_2, \dots m_n$$

e ammettiamo che ogni numero m non superi il corrispondente M, quello cioè di indice uguale; si abbia quindi

(1) $$m_i \leq M_i \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Disponendo in ordine crescente di grandezza tanto i numeri M che i numeri m, si ottengano i due nuovi gruppi

$$M'_1, M'_2, \dots M'_n$$
$$m'_1, m'_2, \dots m'_n$$

nei quali $M'_i \leq M'_{i+1}$, $m'_i \leq m'_{i+1}$. Le condizioni (1) sono ancora soddisfatte per le coppie di numeri corrispondenti, cioè si ha

(1') $$m'_i \leq M'_i.$$

Difatti nessuna m può superare M'_n; in particolare quindi sarà

$$m'_n \leq M'_n .$$

Analogamente M'_{n-1} non è inferiore ad $n-1$ delle m e la sola delle m che può superare M'_{n-1} è m'_n; dunque avremo

$$m'_{n-1} \leq M'_{n-1}$$

ed il ragionamento può essere continuato per tutte le coppie rimanenti.

Dunque tutte le differenze $M'_i - m'_i$ sono positive o nulle, come le differenze $M_i - m_i$. Sia ε il massimo valore che queste ultime possono raggiungere; dico che nessuna delle differenze $M'_i - m'_i$ può superare ε.

Immaginiamo di ordinare i numeri M conservando come corrispondente di ciascuno di essi il numero m che gli corrisponde nei gruppi primitivi. Otterremo i due gruppi

$$M'_1 , M'_2 , \dots M'_n$$
$$m''_1 , m''_2 , \dots m''_n$$

nei quali per ipotesi sarà

$$M'_i - m''_i \leq \varepsilon .$$

Ora per ordinare i numeri m''_i basterà effettuare un certo numero di scambi a due a due, in modo che ciascuno di essi venga portato successivamente ad occupare il posto che effettivamente gli compete. Siano m''_h, m''_s due degli m'' che debbono essere scambiati fra loro; supponiamo $h < s$, e che m''_s ottenga, con questo scambio, il posto definitivo, cioè sia uguale ad m'_h, il che è sempre lecito supporre.

Avremo

$$M'_h \leq M'_s \qquad m''_h > m''_s$$

e quindi

$$M'_h - m''_h < M'_s - m''_s .$$

Perciò, posto $M'_s - m''_s = d$, potremo dire che nessuna delle due differenze $M_h - m''_h$, $M_s - m''_s$ può superare d, e sarà inoltre $d \leq \varepsilon$.

Avremo inoltre, poichè $m''_s = m'_h$,

$$M'_h - m''_s > 0 , \quad M'_s - m''_h \geq 0$$

e anche

$$M'_h - m''_s \leq M'_s - m''_s = d$$
$$M'_s - m''_h < M'_s - m''_s = d .$$

Dunque le due nuove differenze che si ottengono dopo lo scambio sono entrambe minori di d, se $M_h < M_s$, e si manterranno uguali alle primitive, quando sia $M'_h = M'_s$. Perciò avremo sempre

$$M'_i - m'_i \leq \varepsilon .$$

Supponiamo ora che i valori delle M, m variino, e cresca anche, se vuolsi, indefinitamente il loro numero n; però restino sempre verificate le condizioni (1) e quindi anche le (1'). Se allora le differenze $M_i - m_i$ tendono a zero uniformemente, cioè da un certo punto in poi si ha, per qualunque valore dell' indice i,

$$M_i - m_i < \eta$$

ove η è una quantità positiva arbitrariamente fissata e prossima a zero quanto si vuole, da quanto abbiamo dimostrato segue che le differenze $M'_i - m'_i$ formate coi termini corrispondenti dei gruppi ordinati, godono di una proprietà analoga, cioè si mantengono sempre positive, o nulle, e tendono esse pure uniformemente a zero, soddisfacendo anche alle condizioni

$$M'_i - m'_i < \eta.$$

2. Queste proprietà, affatto elementari, trovano qualche applicazione nello studio di una quistione, trattata in una Nota precedente [1], che riguarda la definizione e costruzione di funzioni rappresentanti i valori ordinati di una funzione reale di una variabile. Esse permettono di considerare le cose sotto un altro punto di vista.

In un intervallo (a, b) si abbia una funzione $f(x)$ che supporremo finita e continua. Sia data inoltre una legge di divisione dell' intervallo (a, b) in intervalli parziali $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ tale che al crescere di n questi intervalli tendano uniformemente a zero. Fissata una divisione speciale indichiamo con $M_1, M_2, \dots M_n$ i valori massimi che $f(x)$ assume rispettivamente in $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$, e con $m_1, m_2, \dots m_n$ i minimi.

Indichiamo poi con $\Psi_n(x)$ una funzione la quale negli intervalli $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ assuma rispettivamente i valori del gruppo ordinato dei massimi, cioè M'_1, $M'_2, \dots M'_n$ e che nei punti di separazione di due intervalli successivi δ_i, δ_{i+1} assuma il valor medio $\frac{1}{2}(M'_i + M'_{i+1})$. La funzione $\Psi_n(x)$ sarà così definita per qualunque valore di x, compreso fra a e b.

Similmente indichiamo con $\psi_n(x)$ una funzione costruita in modo analogo col gruppo ordinato dei minimi $m'_1, m'_2, \dots m'_n$.

Essendo n finito potremo sempre avere anche una rappresentazione geometrica semplicissima di queste due funzioni, mediante n segmenti di retta paralleli all' asse delle ascisse ed $n-1$ punti sulle ordinate dei punti di separazione di due intervalli consecutivi.

Ora noi abbiamo visto che, essendo $M_i - m_i \geq 0$, deve essere anche $M'_i - m'_i \geq 0$ per qualunque valore dell' indice i, e quindi anche

$$\tfrac{1}{2}(m'_i + m'_{i-1}) \leq \tfrac{1}{2}(M'_i + M'_{i+1}).$$

[1] *Sulle funzioni reali di una variabile*, vol. VIII, 1° sem., pag. 4-12. Nell'esempio segnato (β) in questa Nota, per l'esattezza delle formole, deve porsi $a = 0$, quantunque ciò non sia essenziale per la quistione.

Dunque per qualunque valore di x compreso nell'intervallo (a, b) avremo

$$\psi_n(x) \leq \Psi_n(x).$$

Inoltre per una proprietà nota delle funzioni continue, le differenze $M_i - m_i$ al crescere di n tendono uniformemente a zero. Lo stesso quindi avverrà delle differenze $M'_i - m'_i$ e potremo perciò concludere che, dato un numero η piccolo ad arbitrio e positivo, sarà sempre possibile trovare per n un valore abbastanza grande perchè si abbia, per qualunque x,

$$\Psi_n(x) - \psi_n(x) < \eta$$

e questa relazione si conservi al crescere di n.

Perciò possiamo scrivere anche

$$\lim_{n=\infty} [\Psi_n(x) - \psi_n(x)] = 0 .$$

Di qui segue che, se le successive funzioni $\Psi_n(x)$, al crescere di n, tendono ad una funzione limite determinata, cioè esiste una funzione $\psi(x)$ tale che la differenza $\Psi_n(x) - \psi(x)$, qualunque sia x, si possa ridurre piccola ad arbitrio, alla stessa funzione $\psi(x)$ tendono anche le funzioni $\psi_n(x)$.

Così pure se invece di considerare i valori massimi o minimi, consideriamo n valori di $f(x)$ scelti in modo qualsiasi negli intervalli $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ e, ordinando questi valori, costruiamo poi la funzione analoga alla $\Psi_n(x)$, o $\psi_n(x)$, anche questa nuova funzione, nella ipotesi fatta, tenderà alla stessa funzione $\psi(x)$. Questa funzione dunque, se esiste, *è indipendente dalla scelta dei valori di* $f(x)$, *negli intervalli* $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$.

3. Supponiamo che la legge di divisione dell'intervallo dato, sia tale per cui si passi da una divisione alla successiva suddividendo ciascuno degli intervalli della prima in uno stesso numero di parti, senza per altro fissare che questo numero debba essere lo stesso per tutti i passaggi da una divisione all'altra. In tal caso la funzione limite $\psi(x)$ esiste sempre.

Consideriamo una divisione speciale $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ e supponiamo, per fissare le idee, che nella divisione successiva ogni intervallo δ_i venga spezzato in *tre* parti. Se $\delta'_i, \delta''_i, \delta'''_i$ sono queste parti, sarà

$$\delta'_i + \delta''_i + \delta'''_i = \delta_i .$$

Dei tre massimi corrispondenti di $f(x)$, uno almeno sarà uguale ad M_i, gli altri due non potranno superare M_i. Così dei tre minimi, uno sarà uguale ad m_i e gli altri non potranno essere minori. Potremo quindi indicare con M_i, N_i, P_i i tre massimi e supporre

$$M_i \geq N_i \geq P_i . \tag{2}$$

Ordinando i numeri M , N , P in senso crescente, otterremo tre gruppi ordinati

$$M'_1 , M'_2 , \dots M'_n$$
$$N'_1 , N'_2 , \dots N'_n$$
$$P'_1 , P'_2 , \dots P'_n$$

che complessivamente rappresentano tutti i massimi di $f(x)$ corrispondenti alla suddivisione in $3n$ intervalli. Ora, per la proprietà dimostrata in principio al n. 1, dalla (1') segue

$$M'_i \geq N'_i \geq P'_i$$

e quindi fra i $3n$ massimi ve ne sono almeno $3i$ i quali non superano M'_i. Perciò allorquando questi massimi vengono distribuiti ordinatamente nei $3n$ intervalli per costruire $\Psi_{3n}(x)$, i valori che competeranno agli intervalli $\delta'_i , \delta''_i , \delta'''_i$, i quali occupano rispettivamente i posti d'ordine $3i - 2$, $3i - 1$, $3i$, non possono superare M'_i.

Da ciò segue che per qualsiasi valore di x, anche coincidente con uno qualunque dei punti di divisione dell'intervallo, si ha sempre

$$\Psi_{3n}(x) \leq \Psi_n(x) .$$

È chiaro che il ragionamento precedente è generale e sussiste ancora quando invece di suddividere tutti gli intervalli δ_i in tre parti, vengono suddivisi in un numero r qualsiasi di parti. Si avrà in questo caso per qualunque valore di x

$$\Psi_{rn}(x) \leq \Psi_n(x) .$$

In modo analogo si potrebbe dimostrare che per le funzioni $\psi_{rn}(x)$, $\psi_n(x)$ si ha invece

$$\psi_{rn}(x) \geq \psi_n(x)$$

qualunque sia x.

Da ciò segue che se, fissato un valore speciale di x nell'intervallo dato, consideriamo le due successioni di valori $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \psi^{(3)}, \dots$ e $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \Psi^{(3)}, \dots$ che ad esso competono per la legge fissata di divisione dell'intervallo, queste due successioni soddisferanno alle condizioni

$$\psi^{(1)} \leq \psi^{(2)} \leq \psi^{(3)} \leq \dots$$
$$\Psi^{(1)} \geq \Psi^{(2)} \geq \Psi^{(3)} \leq \dots$$

mentre le differenze

$$\Psi^{(1)} - \psi^{(1)} , \quad \Psi^{(2)} - \psi^{(2)} , \quad \Psi^{(3)} - \psi^{(3)} , \dots$$

non sono mai negative ed impiccoliscono indefinitamente. Per un noto assioma potremo quindi concludere che esiste *uno* ed *un solo* valore a cui tendono entrambe le successioni considerate. Questo valore sarà quello della funzione $\psi(x)$ nel punto x.

L' esistenza di una funzione limite $\psi(x)$ per qualsiasi procedimento di divisione dell' intervallo, che soddisfaccia alle condizioni stabilite, resta così dimostrata, *ammettendo per la funzione* $f(x)$ *la sola condizione che sia finita e continua.*

Non possiamo però concludere da quanto precede che questa funzione limite debba essere sempre la stessa quando varia, anche nel cerchio delle condizioni stabilite, la legge di divisione dell' intervallo. Anzi non sarebbe difficile mostrare con qualche esempio che la funzione $\psi(x)$ varia effettivamente colla legge di divisione. Perciò mediante il procedimento studiato non è possibile definire *una* funzione ordinata di un' altra $f(x)$ a meno di aggiungere qualche condizione relativa alla legge di divisione. Questa conclusione giustifica la definizione che ho stabilita nella Nota già citata per la funzione ordinata $\mathrm{O}f(x)$, partendo da quel procedimento di passaggio al limite che ho indicato con

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x)$$

Tale procedimento, quando la legge di divisione dell' intervallo è tale per cui tutti gli intervalli parziali risultano uguali fra loro, non differisce da quello che serve a definire $\psi(x)$; e allora, se esiste la $\mathrm{O}f(x)$, la $\psi(x)$ corrispondente coincide con essa [1].

[1] Un esempio semplice, che prova la dipendenza di $\psi(x)$ dalla legge di divisione, è il seguente.

Nell' intervallo (0,2) sia $f(x)$ rappresentata dai due segmenti di retta che uniscono gli estremi dell' intervallo col punto alla distanza 1 sulla perpendicolare innalzata dal punto $x=1$; ossia si abbia

$$\text{nell' intervallo } (0,1) \quad f(x)=x$$
$$\text{"} \quad (1,2) \quad f(x)=2-x$$

Avremo

$$\mathrm{O}f(x)=\frac{x}{2}$$

Dividasi ora l' intervallo (0,2) in quattro intervalli mediante i punti $x=\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}$. Il gruppo ordinato dei valori m' corrispondenti a questi intervalli è:

$$0, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$$

Quindi nel tratto da $x=1$ ad $x=\frac{3}{2}$ (escluso l'estremo inferiore) si ha

$$\psi_4(x)=\frac{3}{4}$$

mentre nello stesso tratto $\mathrm{O}f(x)$ raggiunge il valore $\frac{3}{4}$ soltanto all' estremo superiore. Esclusi questi estremi, avremo quindi

$$\psi_4(x) > \mathrm{O}f(x)$$

Ora, qualunque siano le ulteriori suddivisioni, i valori di $\psi(x)$, pel tratto considerato, non possono essere inferiori a quelli di $\psi_4(x)$. È quindi impossibile che in esso $\psi(x)$ coincida con $\mathrm{O}f(x)$.

II.

Nella stessa Nota viene definita una certa funzione $\Gamma(x)$ mediante le relazioni

$$\Gamma(a + l_A) = \Gamma(b - L_A) = f(x_A)$$

ove l_A ed L_A rappresentano la somma di tutti gli intervalli nei quali $f(x)$, supposta continua, è minore, o maggiore, rispettivamente del valore A che essa assume nei punti x_A.

Circa la possibilità della determinazione di queste due grandezze l_A ed L_A, quando il gruppo dei punti x_A è infinito, conviene aggiungere qualche considerazione, poichè, come mi ha fatto osservare il prof. Volterra, (il quale si è già occupato di una quistione analoga a proposito del metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet, V. *Rend. del Circolo matematico di Palermo*) le espressioni usate al § 2 di quella Nota non sono sufficientemente chiare e precise, quando si conservi alla parola *gruppo*, il significato generale, comunemente usato, nè si pongano altre limitazioni per la funzione $f(x)$.

La quistione, come facilmente si vede, si riduce a questo: dato un gruppo infinito di punti contenuti in un segmento finito, quando è che possiamo estendere a tale gruppo la proprietà, di cui gode un gruppo finito, di *dividere* il segmento dato in segmenti, la cui somma è uguale al segmento stesso?

Ora mostrerò che ogni qual volta il gruppo è di 1° genere, cioè ha un numero finito n di gruppi derivati, e contiene i punti di questi gruppi [1], il concetto della divisibilità del segmento mediante il gruppo può essere applicato.

Indicando con $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots G^{(n)}$ i successivi gruppi derivati del gruppo dato G, mediante i punti del gruppo $G^{(n)}$, potremo dividere il segmento dato δ in un numero finito m di segmenti $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_m$.

I punti del gruppo $G^{(n-1)}$ cadranno allora in generale in numero infinito entro ciascuno dei segmenti δ_i, ma i punti limiti del gruppo stesso non potranno trovarsi che agli estremi dei segmenti δ_i. Perciò indicando con δ_{i,i_1} il segmento compreso fra due punti qualsiansi consecutivi di $G^{(n-1)}$ compresi nell'interno di δ_i e con δ_{i,i_1-1} δ_{i,i_1+1} i due segmenti determinati dai due punti successivi a sinistra ed a destra, potremo rappresentare δ_i con una somma semplicemente infinita

$$\delta_i = \sum_{i_1=-\infty}^{i_1=+\infty} \delta_{i,i_1}$$

[1] Per questo basta che contenga il primo gruppo derivato, come avviene sempre nel nostro caso poichè si suppone $f(x)$ continua. — V. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris 1898, pag. 38.

che potrà anche estendersi all' infinito da una sola parte, od anche essere finita. Avremo così

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1=-\infty}^{i_1=+\infty} \delta_{i,i_1} \, .$$

Analogamente i punti limiti del gruppo $G^{(n-2)}$ non possono trovarsi che nei punti estremi dei segmenti δ_{i,i_1} ; dunque, mediante i punti di questo gruppo uno qualsiasi di questi segmenti potrà rappresentarsi con una serie semplicemente infinita di segmenti

$$\delta_{i,i_1} = \sum_{i_2=-\infty}^{i_2=+\infty} \delta_{i,i_1,i_2}$$

e si avrà così

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1=-\infty}^{i_1=+\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{i_2=+\infty} \delta_{i,i_1,i_2} \, .$$

In tal modo possiamo continuare fino alla introduzione dei segmenti determinati dai punti dei gruppi $G^{(1)}$ e G, dopo di che si avrà

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{i_1=-\infty}^{i_1=+\infty} \sum_{i_2=-\infty}^{i_2=+\infty} \cdots \sum_{i_n=-\infty}^{i_n=+\infty} \delta_{i,i_1,i_2,\ldots i_n} \, .$$

In base a questa formola potremo ancora dire che il gruppo G *divide* il segmento dato in infiniti segmenti, la cui somma riproduce il segmento stesso (¹).

Per la costruzione della funzione $\Gamma(x)$ secondo la via indicata converrebbe quindi aggiungere, rispetto alla funzione $f(x)$, la condizione che i gruppi dei punti nei quali essa prende uno stesso valore, siano di 1° genere.

Il prof. Volterra si è occupato anche delle due seguenti quistioni: 1° come possa essere estesa la definizione della funzione $\Gamma(x)$ quando la $f(x)$ è completamente arbitraria; 2° trovare una espressione analitica della stessa $\Gamma(x)$; ed io sono assai lieto di poter riportare da alcune lettere a me dirette le sue interessanti considerazioni.

Per chiarezza noto che egli chiama *funzione ordinata* la funzione $\Gamma(x)$.

« Torino, 29 gennaio 1899.

. . . .

« Sia data una funzione $f(x)$ finita e continua nell' intervallo $(0, l)$, la quale ha un numero finito di oscillazioni e non ha tratti di invariabilità. Rappresentiamola con una curva e tiriamo una parallela all' asse x che ne disti y.

(¹) Un teorema che ha relazione colla proprietà qui considerata, si trova nella Memoria di Cantor, *Sur les ensembles infinis et linéaires des points*, III, Acta math. 2.

La curva verrà decomposta in *valli* e *monti*; facciamo la somma delle *basi* delle valli (ossia delle loro proiezioni sull' asse x). La curva ordinata ha per ordinata y e per ascissa la somma delle basi delle valli (o anche l meno la somma delle basi dei monti). Corrispondentemente alla curva viene costruita la *funzione ordinata*. Chiamiamo ora $F(x)$ la funzione che per ogni valore di x è uguale al più piccolo dei due valori $f(x)$ o y, essendo y il valore costante già considerato, e scriviamo l' equazione della curva ordinata sotto la forma

$$x = \Psi(y)$$

« Una considerazione geometrica semplicissima ci fa vedere che si ha

$$(a) \qquad \int_0^l F(x)\,dx = \int_0^y (l - \Psi(y))\,dy$$

. . . .

« Supponiamo ora che $f(x)$ sia una funzione qualunque finita, continua o discontinua.

« Si divida l' intervallo $(0, l)$ in cui è definita $f(x)$ in n parti $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ e si consideri la somma degli intervalli in cui $f(x)$ è sempre minore di y, e si chiami con a; quindi si facciano diminuire indefinitamente questi tratti. Allora a tenderà verso un limite ψ che è indipendente dal modo con cui questi tratti vanno a zero. Ciò si dimostra con un ragionamento che per brevità sopprimo. Nello stesso modo sia b la somma degli intervalli δ_i nei quali $f(x)$ è sempre maggiore di y. Avremo che b tenderà coll' impiccolire degli intervalli in un modo qualunque verso un limite χ. Ed evidentemente in generale non si avrà $\psi + \chi = l$. Se la funzione è discontinua si vede facilmente come ciò può accadere. Basta considerare una funzione $f(x)$ che sia nulla nei punti razionali ed 1 nei punti irrazionali. Ma anche se $f(x)$ è continua si vede che ciò può accadere. Basta ricorrere all' esempio del gruppo di punti non rinchiudibile che ho dato nella mia Nota del 1880, *Sulle funzioni punteggiate discontinue*.

« Noi possiamo ora considerare le due funzioni $\psi(y)$ e $\psi_1(y) = l - \chi(y)$ ed otteniamo due funzioni che in generale *saranno distinte fra loro* e che potranno considerarsi come proprie a definire due funzioni ordinate. Esse evidentemente sono sempre crescenti e quindi si può concepire un modo di avere delle funzioni inverse. Queste funzioni possono essere discontinue in infiniti punti. Però essendo sempre crescenti sono integrabili e quindi hanno infiniti punti di continuità in ogni intervallo.

« Ci si può chiedere quali proprietà avranno i loro integrali i quali possono essere diversi fra loro. A questo ci può guidare la relazione (a) precedentemente trovata. Perciò supponiamo che il rettangolo costruito sugli assi x ed y coi lati l ed M (essendo M il limite superiore della funzione $f(x)$)

venga diviso in n^2 rettangoli simili, dividendo ogni lato in n parti uguali. Consideriamo la funzione $F(x)$ che per ogni valore di x è uguale al più piccolo dei due valori $f(x)$ o y (essendo y un numero scelto fra 0 ed M). Questa funzione non sarà in generale integrabile (poichè supponiamo $f(x)$ comunque continua o discontinua) ma potremo di essa avere gli integrali *superiore* ed *inferiore* (vedi la mia Nota del 1881, *Sui principii del calcolo integrale*). Per ottenere in particolare quest' ultimo basterà prendere in ognuna delle colonne di rettangoli costruite (per es. nella colonna di rettangolo di base h) tutti i rettangoli, di cui i punti hanno le ordinate minori del minimo di $F(x)$ nell' intervallo h. Sommiamo tutti i rettangoli così scelti e poi facciamo crescere n indefinitamente. Il limite della somma esisterà e sarà l' integrale inferiore λ di $F(x)$ in tutto l' intervallo $(0, l)$. Questo modo di calcolare λ, confrontato al modo di costruire $\psi(y)$ e $\psi_1(y)$ ci mostra che

$$\int_0^y (l-\psi(y))\,dy \quad \text{e} \quad \int_0^y (l-\psi_1(y))\,dy$$

non possono essere inferiori a λ. Nello stesso modo si può trovare che i due integrali non possono superare l' integrale superiore Λ di $F(x)$ nell' intervallo $(0, l)$. Perciò *i due detti integrali sono compresi fra λ e Λ.*

« Supponiamo che $f(x)$ sia integrabile; allora λ e Λ debbono coincidere per ogni possibile valore di y (giacchè anche $F(x)$ sarà integrabile); per conseguenza

$$\int_0^y (l-\psi(y))\,dy = \int_0^y (l-\psi_1(y))\,dy$$

ossia le due funzioni $\psi(y)$ e $\psi_1(y)$ hanno integrali uguali in ogni intervallo e perciò in infiniti punti dell' intervallo sono uguali fra loro.

« Riassumendo mi sembra che potrebbe dirsi: *Ad ogni funzione $f(x)$ corrispondono due funzioni ordinate $\psi(y)$, $\psi_1(y)$. Anche se $f(x)$ è continua le due funzioni possono essere diverse fra loro, però basta che $f(x)$ sia integrabile, perchè le due funzioni differiscano fra loro per una funzione di integrale nullo e quindi siano uguali fra loro in infiniti punti di ogni intervallo.*

. . . .

« aff.mo V. VOLTERRA ».

Torino, 10 giugno 1899.

. . . .

« In una recente Nota (¹) il Dott. Straneo si occupa della ricerca di una espressione analitica della funzione ordinata. A me sembra che l' espressione analitica più naturale della funzione ordinata venga sempre dal conside-

(¹) Rendiconti, Vol. VIII, 1° sem. pag. 438-442.

rare la somma delle basi delle valli; ed infatti sia $\Theta(y, x)$ una funzione che goda delle seguenti proprietà

$$\Theta(y, x) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < x \\ 1 & \text{per } y > x \end{cases}$$

« Non vi è nessuna difficoltà a costruirla analiticamente (il valore per $y = x$ può essere qualunque). Allora la somma delle basi delle valli corrispondenti all' ordinata y sarà

$$\int_0^l \Theta(y, f(\eta))\, d\eta$$

onde l' equazione della curva ordinata sarà

$$\text{(A)} \qquad x = \int_0^l \Theta(y, f(\eta))\, d\eta .$$

« Se prendiamo, per esempio, (Riemann, Partielle Diff. § 14)

$$\Theta(y, x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} [(y - x)\xi]}{\xi} d\xi$$

otterremo

$$\text{(B)} \qquad x = \frac{l}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^l d\eta \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} [(y - f(\eta))\xi]}{\xi} d\xi$$

« O sotto la forma (A) o sotto la forma (B) abbiamo quindi l' equazione della curva ordinata in tutti i casi almeno, in cui la funzione da ordinarsi $f(x)$ è continua, senza tratti d' invariabilità e con un numero finito di oscillazioni.

. . . .

« affmo V. Volterra ».

Chimica. — *Studi intorno alla struttura degli alcaloidi del melagrano* (1). Nota di A. Piccinini, presentata dal Socio Ciamician.

In una Nota inserita nei Rendiconti di questa Accademia nell' aprile scorso (2), discutendo i risultati di una serie di esperienze dimostranti in modo sicuro che la parte resistente all' ossidazione nella molecola della *metilgranatonina*, altro non è che un nucleo piperidinico, ebbi occasione di far notare che la estrema somiglianza di proprietà degli alcaloidi della serie

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna. Agosto 1899.

(2) V. questi Rendiconti, vol. VIII, 1° sem, pag. 392.