ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

approssimate distanze; non vi è bisogno di dire che i valori $A_1 B_1 \ldots A_x B_x$ misurati sono dei numeri tutti minori delle vere distanze di grandezze variabili, ma forniscono l'idea del fenomeno.

Eros visto dal sole resta in questo segmento d'orbita sempre ad ovest di Marte, ma in principio vi si accosta così che si può pensare che avverrà una congiunzione inferiore; senonchè, mentre il raggio vettore di Eros oltrepassa quello di Marte e si penserebbe alla possibilità d'una opposizione, il moto angolare di Eros decresce, e il pianeta si allontana da Marte, e si allontanerà fino a distare da questa 65° verso settembre 1900 per poi rapidamente riavvicinarsi. In quanto al moto areocentrico di Eros in questo segmento d'orbita, esso appare sempre diretto con un massimo fra $A_V B_V$ e $A_{VI} B_{VI}$. Quando Marte è in A_V e Eros in B_V, l'angolo a Marte fra il sole e Eros è ben minore di 90°, mentre quando Marte è in A_{VI} e Eros in B_{VI} l'angolo a Marte è presso che retto. Conteggiando approssimatamente per le due date 1899 settembre 26,0 e 1899 ottobre 16,0 B si ha:

longitudine areocentrica di Eros	108°,9	.... 150°,4
latitudine " "	56, 9 sud	58, 9 sud
distanza	0.31	0.29

1899 settembre 26.0 B	Elongazione di Eros (eclittica)	56°,1
1899 ottobre 16,0 B	" " "	87, 2.

Matematica. — *Interpretazione gruppale degli integrali di un sistema canonico.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il sig. Maurice Lévy ha per il primo osservato (¹) che, in una varietà qualunque, è possibile uno spostamento senza deformazione allora e solo allora che dal quadrato dell'elemento lineare si può, con acconcia trasformazione, far sparire una delle variabili. Ciò è quanto dire che esiste un integrale primo, lineare ed omogeneo, per le geodetiche della varietà.

Il prof. Cerruti ritornò sull'argomento (²), trattando altresì il caso, in cui agiscono forze conservative. La relazione, di cui sopra è parola, fra integrali primi e spostamenti rigidi, si enuncia con linguaggio gruppale nel modo seguente (³): Se la forza viva e il potenziale ammettono una stessa trasformazione puntuale infinitesima, le equazioni del moto posseggono un

(¹) Comptes Rendus, T. LXXXVI, 18 febbraio e 8 aprile 1878.

(²) In questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. III, 1895.

(³) Cfr. le Note: *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso,* in questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. V, 1896 e la elegante dimostrazione del sig. Liebmann, Math. Ann., B. 50, 1897.

integrale primo lineare ed omogeneo; e reciprocamente. (Il primo membro dell' integrale, scritto in forma canonica, coincide col simbolo della trasformazione infinitesima).

Sorge spontanea la domanda: Agli integrali non lineari corrisponde ancora qualche carattere gruppale?

La risposta è affermativa e si applica senz' altro a qualsivoglia sistema canonico

$$\text{(S)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \right. , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

purchè non si considerino soltanto trasformazioni puntuali (rapporto alle variabili x, operanti per estensioni sulle p), ma più generalmente trasformazioni di contatto nelle x, p. Si trova infatti che *integrali di un sistema canonico e trasformazioni di contatto nelle* x, p, *mutanti il sistema in sè, sono in sostanza la stessa cosa. Ad ogni integrale fa riscontro una trasformazione e inversamente. Le funzioni caratteristiche delle trasformazioni* (fissando opportunamente un addendo, che rimane a priori indeterminato) *si possono far coincidere coi primi membri dei corrispondenti integrali.*

Il teorema si dimostra in modo assai semplice. Sia

$$\delta f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \pi_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + \pi_n \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

una trasformazione infinitesima nelle x, p. Gli incrementi ξ, π si suppongano funzioni delle x, delle p e di un parametro t, invariabile di fronte alla trasformazione. Risguardando le x, p come funzioni di t, potremo estendere la δf alle singole derivate $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$, e i relativi incrementi si avranno dalle formule

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\delta x_i}{dt} = \frac{d\xi_i}{dt},$$

$$\delta \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\delta p_i}{dt} = \frac{d\pi_i}{dt}.$$

Applicata al sistema (S), la trasformazione δf porge

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta \left\{ \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\} = 0 \\ &\delta \left\{ \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\} = 0 \end{aligned} \right. . \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Queste equazioni dovranno essere identicamente soddisfatte, in virtù delle (S), ogniqualvolta il sistema ammette la trasformazione infinitesima δf.

Introduciamo l'ipotesi che δf è trasformazione di contatto. Le ξ e le π sono derivate di una medesima funzione $W(x, p, t)$ [1], a norma delle formule

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}, \tag{2}$$

e il simbolo δf diventa la parentesi di Poisson (W, f).

Le (1) si possono scrivere

$$\frac{d\frac{\partial W}{\partial p_i}}{dt} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0$$

$$\frac{d\frac{\partial W}{\partial x_i}}{dt} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0,$$

ossia, eseguendo la derivazione e tenendo conto delle (S):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p_i \partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial p_i}\right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial x_i}\right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0.$$

che, per note proprietà delle parentesi, equivalgono a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W)\right] = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W)\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

Da queste apparisce che $\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W)$ dipende dalla sola t. Ora W, funzione caratteristica della δf, è determinata dalle (2) a meno di una funzione additiva di t. Si può sempre disporne in modo che risulti identicamente

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W) = 0. \tag{1''}$$

È poi chiaro che dalla (1''), facendo cammino inverso, si ripassa alle (1).

La (1'') è dunque condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema

[1] Lie-Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, cap. 14.

canonico (S) ammetta la trasformazione infinitesima di contatto (W, f).

D' altra parte la equazione stessa esprime precisamente che $W = \text{cost}$ è integrale del sistema (S); di quà la proposizione enunciata.

Si noti che, allorquando W è lineare e omogenea nelle p (e in questo caso soltanto), δf proviene dall' estensione di una trasformazione puntuale rapporto alle x. Segue da ciò che la esistenza di un integrale lineare, omogeneo, e quella di una trasformazione puntuale, mutante il sistema canonico in sè, sono due fatti concomitanti. Supponendo in particolare $H = T - U$, con T omogenea di secondo grado nelle p e U funzione delle sole x, si ritrova il teorema di Lévy-Cerruti. Risulta infatti dalla (1″), scindendo i termini di diverso grado nelle p, che separatamente T ed U ammettono la trasformazione W.

Fisica. — *Variazione della costante dielettrica del vetro per la trazione.* Nota del dott. O. M. Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

Distratto da altro lavoro, non ho potuto, durante l'anno scolastico, occuparmi di una lunga e minuziosa critica pubblicata dal dott. Ercolini [1] contro alcune mie precedenti ricerche su questo argomento [2]. Ebbi solo occasione, nel correggere le bozze di stampa di un lavoro su esperienze analoghe eseguite col caoutchouc, di aggiungere in fine una breve osservazione [3] per difendere il metodo impiegato nelle due ricerche.

Alla sua critica il dott. Ercolini fece seguire la comunicazione di nuove esperienze con le quali, contrariamente a quanto io avevo dedotto dalle mie ricerche, egli cercò di provare che la costante dielettrica del vetro aumenta con la trazione.

Mi sembra però che le esperienze dell' Ercolini non risolvano per nulla la questione poichè l'Autore interpreta come variazione della costante dielettrica un fatto che con quella variazione non ha nessuna relazione e che anzi, operando in buone condizioni, non avrebbe dovuto trovare perchè esso contraddice a una legge *fondamentale* di elettrostatica.

Egli si serviva infatti di una canna di vetro posta tra due armature dalle quali distava all' incirca due millimetri. L'armatura interna era caricata per mezzo del polo positivo di una pila di 300 elementi rame-acqua-zinco; l'esterna poteva essere rilegata al suolo o alla foglia di un elettro-

(1) Ercolini, Rend. Linc., vol. VII, 2° sem.. ser. 5ª, fasc. 7, 8, 1898. Nuovo Cimento, S. IV, T. VIII, pag. 306, 1898.

(2) Corbino, Riv. scient. e ind. Anno XXIX, 28-9, 1897.

(3) Corbino e Cannizzo, Rend. Linc., vol. VII, 2° sem., fasc. 10, 1898.