ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

bus classibus genera nonnullasque Species complectens in duos Tomos divisus a Liberato Sabbati Chrirurgiae Professore et Horti Romani custode elaboratus. Romae MDCCLXVI.

I due volumi sono legati in pelle, le piante stanno, al solito modo, incollate sopra i fogli. Dopo il frontispizio vi è l' *Explicatio nominum auctorum* ed in fine l' indice. Nel volume I sono contenuti 98 fogli con piante appartenenti alle prime sette classi del Tournefort; nel II, 106 appartenenti alle altre classi.

Finalmente nel 1770 il Sabbati componeva un altro erbario, che si conserva nella Biblioteca Alessandrina, e che ha un titolo molto simile al precedente, e cioè: *Catalogus Plantarum juxta Methodum Tournefortianam in Sceleton redactarum genera nonnulla nonnullasque Species complectens à Liberato Sabbati Chirurgiae Professore et Horti Romani Custode.* Romae, MDCCLXX.

È un volume in foglio rilegato in pelle, che nel foglio seguente al titolo porta la *Explicatio nominum mutilatorum Auctorum quibus in presenti opuscolo usi sumus.* Le piante sono incollate sopra 126 fogli e si trovano in buonissimo stato di conservazione. In fine al volume trovasi l' indice alfabetico.

A nessuno può sfuggire l' importanza di questi Erbarî, che sono stati composti o diretti da uomini, che verso la fine del secolo XVII e nel secolo XVIII tanta parte ebbero, insieme ad altri egregi, a tenere in alto onore la Botanica in Roma anche con pubblicazioni le quali vengono, col mezzo delle piante raccolte negli Erbarî, ad avere un valore di molto più grande. Perciò un accurato e completo studio degli Erbarî medesimi, già da tempo iniziato, è ora in corso di stampa e vedrà ben presto la luce.

Matematica. — *Sulle superficie che possono generare due famiglie di Lamé con due movimenti diversi.* Nota del dott. PAOLO MEDOLAGHI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Le numerose ricerche di cui sono state oggetto le superficie che possono generare due famiglie di Lamé con due diversi movimenti, non hanno ancora, come è noto, completamente risoluta la questione: il risultato più generale è quello dovuto al signor Adam, il quale ha fatto conoscere tutte le superficie che con due diverse traslazioni possono generare una famiglia di Lamé [1].

[1] Per tutte queste ricerche vedi Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (T. I, pag. 86 e seg.).

Io espongo ora un metodo nuovo e lo applico in questa Nota al caso in cui i due movimenti sono tra loro permutabili: ritrovo così il teorema dell' Adam per i gruppi di traslazioni, e determino poi tutte le superficie che generano una famiglia di Lamé con una traslazione, ed una seconda famiglia con una rotazione intorno al medesimo asse.

I. Applicando ad una superficie S_0 un gruppo ∞^1 di movimenti si ottenga una famiglia di Lamé, e sia:

$$H_1^2\, du^2 + H_2^2\, dv^2 + H_3^2\, dt^2$$

la forma che l' elemento lineare dello spazio assume per il corrispondente sistema triplo: le superficie dedotte da S_0 siano quelle che corrispondono ai diversi valori di t, ed alla S_0 corrisponda il valore zero del parametro. I punti che si trovano situati sulla stessa traiettoria ortogonale hanno tutti le medesime coordinate (u, v); così viene a stabilirsi una corrispondenza tra i punti di S_0 e quelli di una superficie generica S_t della famiglia. Un' altra corrispondenza si può ottenere considerando il movimento T che conduce S_0 nella S_t; sia in questo modo (u_1, v_1) il corrispondente su S_t del punto (u, v) su S_0. Ad uno stesso punto di S_0 si possono dunque far corrispondere con due leggi diverse due punti (u, v) ed (u_1, v_1) di S_t e si ottiene così una corrispondenza tra punti di una medesima superficie. Questa corrispondenza trasforma in sè stesso il sistema delle linee coordinate; essa è perciò analiticamente rappresentata da equazioni della forma:

(1) $$u_1 = \varphi(u, t)\,; \quad v_1 = \psi(v, t)$$

che per $t = 0$ dànno $u_1 = u$; $v_1 = v$.

Se in entrambe le (1) mancasse il parametro t, esse avrebbero la forma $u_1 = u$; $v_1 = v$ e significherebbero che le traiettorie del movimento sono anche traiettorie ortogonali della famiglia considerata. Questa famiglia si comporrebbe perciò di piani: le altre due famiglie che completano il sistema triplo sarebbero composte entrambe o di cilindri, o di superficie di rotazione.

Ritornando al caso generale ed interpretando le (1) come le equazioni di una schiera di corrispondenze tutte sulla medesima superficie, è facile vedere che tale schiera è un gruppo. Una famiglia di Lamé, che non sia formata di soli piani, o di sole sfere, individua un sistema triplo, e perciò se la famiglia di Lamé è trasformata in sè stessa da un movimento, anche il sistema triplo viene trasformato in sè stesso: ne segue che la forma delle equazioni (1) non dipende dalla superficie iniziale S_0.

Si applichi ora alla S_t un movimento V del gruppo ∞^1 di movimenti e si ottenga una superficie S_v in cui il punto (u_2, v_2) corrisponda ad (u_1, v_1). Sulla S_v si ha una corrispondenza $(u_2, v_2\,;\ u, v)$ relativa alla superficie iniziale S_0 ed al movimento TV, una corrispondenza $(u_2, v_2\,;\ u_1, v_1)$ relativa ad S_t ed al movimento V, e la risultante $(u_1, v_1; u, v)$ è anch' essa contenuta nelle equazioni (1).

Quando la famiglia considerata si compone di piani o di sfere, basta aggiungere la condizione che il sistema triplo sia trasformato in sè stesso dal movimento perchè questo risultato sussista.

Sono ora da distinguere due casi secondo che il parametro t si presenta in entrambe le (1), od in una sola tra esse. Nel primo caso si ha la forma canonica:

$$u_1 = u - t\,; \quad v_1 = v - t$$

e le superficie $u - v =$ costante sono invarianti nel movimento. Nel secondo caso si ha la forma canonica:

$$u_1 = u - t\,; \quad v_1 = v$$

e le superficie $v =$ costante sono invarianti nel movimento.

Quasi tutte le precedenti considerazioni sussistono se invece dei movimenti si parla di trasformazioni conformi dello spazio.

II. Consideriamo una schiera ∞^2 di superficie eguali:

$$x = x(u, v, a, b)$$
$$y = y(u, v, a, b)$$
$$z = z(u, v, a, b)$$

in cui a, b sono i parametri che individuano la superficie, ed u, v le coordinate di tutti i punti omologhi; sia:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2\,du^2 + H_2^2\,dv^2 + m\,da\,du + m_1\,db\,du + \\ + n\,da\,dv + n_1\,db\,dv + p\,da^2 + p_1\,db^2 + q\,da\,db$$

onde per la famiglia $b = \varphi(a)$:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2\,du^2 + H_2^2\,dv^2 + \left(m + m_1\frac{d\varphi}{da}\right)da\,du + \\ + \left(n + n_1\frac{d\varphi}{da}\right)da\,dv + \left(p + q\frac{d\varphi}{da} + p_1\left(\frac{d\varphi}{da}\right)^2\right)da^2\,. \tag{1}$$

Se questa è una famiglia di Lamé, deve esser possibile con un cambiamento di coordinate della forma:

$$u = U(u_1, a)\,; \quad v = V(v_1, a) \tag{2}$$

ridurre la forma (1) a non contenere che i quadrati dei differenziali. Ma la trasformazione (2) dipenderà effettivamente anche dalla funzione $\varphi(a)$ e dalle sue derivate; sarà perciò del tipo:

$$u = U\left(u_1, a, \varphi(a), \frac{d\varphi}{da}, \ldots \frac{d^r\varphi}{da^r}\right)$$
$$v = V\left(v_1, a, \varphi(a), \frac{d\varphi}{da}, \ldots \frac{d^r\varphi}{da^r}\right)$$

e si dovrà avere:

$$\left(m + m_1 \frac{d\varphi}{da}\right) \frac{\partial u}{\partial u_1} +$$
$$+ 2H_1^2 \frac{\partial u}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{da} + \frac{\partial u}{\partial \frac{d\varphi}{da}} \frac{d^2\varphi}{da^2} + \dots \frac{\partial u}{\partial \frac{d^r\varphi}{da^r}} \frac{d^{r+1}\varphi}{da^{r+1}} \right) = 0$$

ed una analoga equazione per V.

Se queste equazioni devono essere soddisfatte per qualunque funzione φ, è necessario che sia:

$$\frac{\partial u}{\partial \frac{d^r\varphi}{da^r}} = 0 \dots \frac{\partial u}{\partial \frac{d\varphi}{da}} = 0 .$$

e perciò U (e V) non dipenderà che da $u_1(v_1)$, a, e b. È utile insistere su questo risultato: se una superficie può generare una famiglia di Lamé con due movimenti diversi, è noto che lo stesso avviene anche per tutti i movimenti che risultano dalla combinazione di quei due; e si può perciò supporre, senza nulla togliere alla generalità dei risultati, che i movimenti in questione formino un gruppo ∞^2. Si ha dunque una schiera di ∞^2 superficie eguali ed ogni schiera ∞^1 staccata dalla schiera ∞^2 è una famiglia di Lamé: prese due superficie ad arbitrio, vi sono infinite di tali famiglie che contengono le due superficie; ma la corrispondenza determinata dalle traiettorie ortogonali tra i punti delle due superficie è una sola: essa non dipende dal cammino percorso per passare dall'una all'altra superficie, ma soltanto dalle posizioni iniziale e finale. È da notare che il ragionamento seguìto per giungere a questo risultato, si applica anche alle trasformazioni conformi dello spazio.

Con considerazioni identiche a quelle del n. I si dimostrerà che le

$$u = \mathrm{U}(u_1 , a , b) ; \quad v = \mathrm{V}(v_1 , a , b)$$

rappresentano un gruppo di trasformazioni, e si potranno perciò ricondurre a forme canoniche.

Per restare in questa Nota nei limiti che mi sono prefisso, supporrò ora che la superficie S_0 possa generare una famiglia di Lamé con movimenti permutabili: pel primo movimento M_1 siano:

$$u_1 = \varphi(u , t) ; \quad v_1 = \psi(v , t)$$

le formole della corrispondenza tra punti omologhi nel movimento, e punti omologhi nel sistema triplo; pel secondo movimento M_2 siano:

$$u' = \Phi(u , \tau) ; \quad v' = \Psi(v , \tau).$$

Applicando ad S_0 prima il movimento M_1 e poi il movimento M_2, si ottenga una superficie S_1 su cui la corrispondenza sarà:

$$u'_1 = \Phi(u_1, \tau); \quad v'_1 = \Psi(v_1, \tau)$$

applicando invece prima M_2 e poi M_1 si avrà su S_1 la stessa corrispondenza, rappresentata dalle formole:

$$u'_1 = \varphi(u', t); \quad v'_1 = \psi(v', t).$$

Quindi:

$$\Phi(\varphi(u, t), \tau) = \varphi(\Phi(u, \tau), t)$$
$$\Psi(\psi(v, t), \tau) = \psi(\Psi(v, \tau), t).$$

D'altra parte è noto che due gruppi ∞^1 della varietà ad una dimensione non possono essere permutabili: qnindi i gruppi:

$$u_1 = \varphi(u, t); \quad u' = \Phi(u, \tau)$$

o sono identici tra loro, od uno tra essi si riduce alla trasformazione identica; lo stesso deve dirsi dei gruppi in v. Se i due gruppi in u fossero identici, e lo fossero pure tra loro i due gruppi in v, i movimenti non sarebbero distinti e formerebbero un unico gruppo ∞^1. Ne segue che una almeno delle formole di trasformazione deve ridursi alla identità; ciò che può esprimersi nel seguente modo:

Se una superficie può generare due famiglie di Lamé con due movimenti diversi, permutabili tra loro, in uno dei due sistemi tripli una famiglia si compone di superficie invarianti nel movimento.

Questo risultato ed il ragionamento che vi conduce sussistono anche sostituendo alla parola 'movimento' la locuzione 'trasformazione conforme dello spazio'.

Sulle superficie invarianti consideriamo le traiettorie del movimento, e da tutti i punti di una di tali linee conduciamo le traiettorie ortogonali della famiglia: le superficie che così si ottengono incontrano ortogonalmente la famiglia delle superficie invarianti, ed è evidente che quando il movimento è una rotazione od una traslazione esiste una terza famiglia di superficie ortogonali alle due precedenti. In un tale sistema triplo le traiettorie del movimento sono traiettorie ortogonali e la terza famiglia si compone quindi di piani: è questa una soluzione del problema che potremmo dire triviale.

Resta solo l'ipotesi che la famiglia di superficie invarianti possa far parte di due diversi sistemi tripli; ma in tal caso essa si compone di piani o di sfere. Se il movimento è una trasiazione, le superficie invarianti sono piani paralleli ad una data direzione, e le altre due famiglie del sistema triplo sono composte di superficie modanate; se il movimento è una rotazione intorno ad un asse, le superficie invarianti sono sfere coi centri su quell' asse e le altre due famiglie del sistema triplo sono composte di superficie di Joachimstal.

Si hanno dunque i seguenti teoremi:

Se una superficie può generare due famiglie di Lamé con due traslazioni, essa è una superficie modanata a sviluppabile direttrice cilindrica.

Se una superficie può generare due famiglie di Lamé con una traslazione ed una rotazione intorno al medesimo asse, essa è o una superficie modanata a sviluppabile direttrice cilindrica, o una superficie di Joachimstal.

Sui teoremi analoghi che potrebbero stabilirsi pei gruppi permutabili di trasformazioni conformi dello spazio, mi riservo di tornare in altra occasione.

III. Dopo i risultati ottenuti nel numero precedente, la effettiva determinazione delle superficie cercate non presenta alcuna difficoltà e solo dei calcoli lunghi. Il Lévy [1] ha già eseguita una parte di questi calcoli: egli dopo aver osservato che le superficie modanate a sviluppabile cilindrica possono generare per traslazione una famiglia di Lamé, si è proposto di determinare quelle superficie modanate che generano una famiglia di Lamé anche per rotazione intorno all' asse di traslazione. Oltre le sfere, che insieme ai piani possono considerarsi in simile questione come soluzione triviale, egli ha trovato quelle superficie modanate di cui la sviluppabile direttrice è un cilindro circolare. Ponendo invece la condizione che tali superficie debbano generare una famiglia di Lamé per una traslazione ortogonale alle generatrici del cilindro direttore, si otterrebbero solo piani, sfere e superficie cilindriche.

Tali risultati possono ottenersi del resto assai semplicemente con considerazioni geometriche. Lo mostrerò ora cercando le superficie di Joachimstal che generano una famiglia di Lamé per traslazione lungo l' asse dei piani di curvatura.

Se in un sistema triplo una famiglia si compone di superficie di Joachimstal con lo stesso asse o, vi è una seconda famiglia per le superficie della quale le linee di curvatura di un sistema sono tutte in piani passanti per o; tale famiglia si compone dunque di superficie di Joachimstal, e la terza famiglia si compone di sfere coi centri sull' asse o. Se inoltre un tale sistema triplo deve trasformarsi in sè stesso per traslazione lungo l' asse o, bisogna che le sfere siano di egual raggio; è chiaro che questa è anche condizione sufficiente; nel senso che una qualunque superficie di Joachimstal in cui le linee di curvatura sferiche sono tutte su sfere di egual raggio può generare per traslazione e rotazione due famiglie di Lamé.

[1] L. Lévy, *Sur les systèmes triplement orthogonaux* (Journal de Math. 1892).

Si ha quindi il teorema seguente:

Le sole superficie che per rotazione e per traslazione lungo un medesimo asse o, *generano famiglie di Lamé sono, oltre i piani e le sfere, le superficie modanate in cui la sviluppabile direttrice è un cilindro circolare parallelo ad* o, *e le superficie di Joachimstal in cui le linee di curvatura di un sistema sono tutte su sfere di egual raggio coi centri sull' asse* o.

Fisica. — *Intorno alla dilatazione termica assoluta dei liquidi e ad un modo per aumentarne notevolmente l'effetto.* Nota II di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

In una Nota precedente descrissi un modo per aumentare a volontà la differenza di livello che si produce nell'apparecchio di Dulong e Petit per effetto della dilatazione termica dei liquidi; esso consiste nel sostituire al tubo ad U di Dulong e Petit un tubo ad elica a spire rettangolari coi lati rispettivamente verticali e orizzontali. Se si riscalda un lato dell'elica, supposta piena di liquido, in ciascuna spira si produce una differenza di pressione agente nello stesso senso per tutte le spire, e nei rami estremi dell'elica si manifesta una differenza di livello tanto maggiore quanto maggiore è il numero delle spire.

Collo scopo di studiare il modo di funzionare del metodo, volli eseguire esperienze di misura con un apparecchio di maggiori dimensioni di quello usato per dimostrazione, e con le opportune cure per avere temperature costanti e ben determinate. Mi proposi di determinare la dilatazione dell' acqua da 0° a 100°, e sebbene le difficoltà incontrate a causa della ristrettezza dei mezzi di cui potevo disporre, e le incertezze inevitabili nella costruzione di un nuovo apparecchio e nell' uso di un nuovo metodo non mi abbiano permesso finora di eseguire altre esperienze all' infuori d' una sola preliminare, dovendo per non breve tempo interrompere l'esperienze, credo utile descrivere l' apparecchio da me usato ed il modo di procedere delle medesime.

Volli sperimentare con un' elica di 10 spire e con tubi verticali di un metro; siccome però mi sarebbe stato difficile costruirla tutta d' un pezzo, e adoperarla senza romperla, deliberai di stabilire le comunicazioni fra i tubi orizzontali e le estremità ripiegate orizzontalmente dei tubi verticali mediante corti tubi di gomma.

Come apparecchio di riscaldamento a 100° usai una grande stufa a vapore a doppia parete, quale si usa per determinare il punto 100° dei termometri, di cui feci prolungare il cilindro esterno e quello interno (che aveva 18 cm. di diametro) in modo che avessero l' altezza di m. 1,20. Alla parte superiore di questi feci saldare una tubulatura laterale simile e sulla stessa