ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVI.

1899

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1899

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 6 agosto 1899.

Matematica. — *Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica.* Nota del Corrispondente CORRADO SEGRE.

Si soglion chiamare *punti di Weierstrass* (1) di un ente algebrico ∞^1 del genere p quei punti che sono almeno p-pli per gruppi della serie canonica g_{2p-2}^{p-1}; sicchè sulla curva canonica C d'ordine $2p-2$ dello spazio S_{p-1}, imagine dell'ente, sono raffigurati da' punti in ciascuno dei quali l'iperpiano osculatore ha con C un contatto almeno p-punto (2).

Il numero di questi punti è espresso *in generale* da $p(p^2-1)$. Ciò è ben noto, e rientra ad esempio in quel caso particolare di una formola del De Jonquières che dà il numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r (3).

D'altra parte il sig. Hurwitz ha determinato (4) per quante unità vada computato nel detto numero $p(p^2-1)$ un dato punto comunque singolare per la curva C. Se escludiamo il caso iperellittico, un punto qualunque di C sarà origine di un solo ramo, lineare, i cui successivi *ranghi* indicheremo con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-2}$: sicchè le moltiplicità d'intersezione di quel ramo con la tangente, col piano osculatore, ..., coll'S_k osculatore $(1 \leq k \leq p-2)$,

(1) V. ad es. M. Haure, *Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique.* Ann. Ecole Normale Supér. (3) 13, 1896.

(2) Cfr. la mia *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, Annali di mat. (2) 22, 1894 (v. specialmente nn. 87 e seg.).

(3) Cfr. loc. cit. n. 42. La formola del De Jonquières si trova nel Journal für Math. t. 66, 1866.

(4) *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich.* Math. Annalen, 41, 1893.

saranno $1+\alpha_1, 1+\alpha_1+\alpha_2, \ldots, 1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$. Con tali notazioni, la moltiplicità di quel punto fra i punti di Weierstrass risulta espressa da

$$W=(p-2)(\alpha_1-1)+(p-3)(\alpha_2-1)+\cdots+2(\alpha_{p-3}-1)+(\alpha_{p-2}-1).$$

Anche ciò rientra come caso particolare in una formola che dà l'influenza di un punto qualunque nel numero dei punti $(r+1)$-pli di una g_n^r (1).

Ora è facile determinare un limite superiore per l'espressione W. In fatti si consideri in generale un S_k $(k<p-2)$, al quale appartenga un gruppo di m punti di C, ove $m>k+1$. Quel gruppo imporrà solo $k+1$ condizioni ai gruppi canonici (cioè agl'iperpiani) che lo contengono. Quindi, pel teorema Riemann-Roch, la serie lineare completa (speciale) d'ordine m da esso determinata sarà di dimensione $\mu=m-k-1$. Inoltre lo stesso teorema conduce, come si sa, al fatto che per una g_m^μ speciale, se si tolgono (come qui si fa) il caso iperellittico e quello della serie canonica, è sempre $m\geq 2\mu+1$ (2). Sarà dunque nel nostro caso $m\geq 2(m-k-1)+1$, ossia $m\leq 2k+1$. *Sulla curva canonica di genere p non possono esistere più di* $2k+1$ *punti giacenti in un* S_k, *ove* $k<p-2$.

Questa proposizione varrà anche se i punti considerati di C sono infinitamente vicini. Quindi pel punto di Weierstrass, i cui ranghi abbiamo chiamato $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, sicchè l'$S_k$ osculatore si può riguardare come contenente $1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ punti infinitamente vicini di C, essa ci dice che, se $k<p-2$, quel numero di punti sarà $\leq 2k+1$, ossia

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\cdots+(\alpha_k-1)\leq k.$$

Sommando le relazioni che si traggono da questa ponendovi $k=1, 2, \ldots, p-3$, insieme con la seguente che deriva dal fatto che l'iperpiano osculatore non può avere con C moltiplicità d'intersezione maggiore di $2p-2$

$$(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\cdots+(\alpha_{p-2}-1)\leq p-1,$$

si ha precisamente

$$W\leq\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1;$$

ossia: *Nel numero complessivo* $p(p^2-1)$ *dei punti di Weierstrass di un ente algebrico (non iperellittico) del genere p nessun punto può contare per più di* $\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1$.

(1) V. la citata *Introduzione*, n. 43.
(2) Cfr. loc. cit. n. 84.

Ne segue subito che: *i punti di Weierstrass fra loro distinti sono almeno*

$$\frac{2p(p^2-1)}{(p-1)(p-2)+2} = 2p+6+\frac{8(p-3)}{p(p-3)+4}.$$

Ossia: *per* $p=3, 5, 6$ *i punti di Weierstrass fra loro distinti sono almeno* $12, 18, 20$; *per* $p>3$ *sono sempre in numero maggiore di* $2p+6$.

Questi risultati sono alquanto più espressivi di quelli ottenuti dal sig. Hurwitz nella Nota citata: cioè che $W < \frac{p(p-1)}{2}$, e che quindi il numero dei punti di Weierstrass distinti (se si esclude il caso iperellittico) è sempre maggiore di $2p+2$ (1). Del resto anche Hurwitz ha avvertito che si potevano ottenere risultati più precisi mediante una più minuta discussione; la quale porterebbe ad esaminare quali valori dei ranghi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ siano effettivamente possibili (2). Volendo fare un tale esame seguendo l'indirizzo geometrico si potrebbe osservare che se ad es. il rango α_k è >1, esisterà sull'ente algebrico considerato una serie lineare, priva di punti fissi, d'ordine $1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ $(\leq 2k+1)$, e dimensione $(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\cdots+(\alpha_k-1)$ (3). L'esistenza di una tal serie sarà generalmente una particolarità per l'ente algebrico, e quando la dimensione riesca >1 permetterà di assegnare un limite superiore pel genere. Se poi due ranghi, α_k, α_l, sono >1, si avranno sull'ente algebrico due particolari serie lineari senza punti fissi, le quali, prese insieme, serviranno pure per ottenere una rappresentazione dell'ente da cui segua di nuovo una limitazione pel genere. E così via.

Geologia. — *I terreni terziarî superiori dei dintorni di Viterbo.* Nota del Corrispondente C. De Stefani e di L. Fantappiè.

Sui terreni terziarî dei dintorni di Viterbo già avevano scritto varî autori. Il P. Pianciani in una lettera al Procaccini Ricci aveva indicato alcuni fossili dei terreni pliocenici di Bagnaia e di Ferento (4), per verità un poco lontani da quelli che noi prendiamo in considerazione. Il Verri pure indicò alcuni fossili del pliocene di Bagnaia (5): ed il Mercalli, durante la sua breve resi-

(1) Quest'ultima proposizione serve in quella Nota per dedurne una semplice notevole dimostrazione del fatto che sopra un ente di genere >1 non possono esistere infinite corrispondenze algebriche biunivoche.

(2) Si vedano a questo riguardo le citate ricerche del sig. Haure.

(3) Ciò in forza di osservazioni precedenti e di un teorema del sig. Noether. Cfr. ancora il n. 87 della mia *Introduzione*.

(4) V. Procaccini Ricci, *Viaggi ai vulcani spenti d'Italia. Viaggio secondo*, t. I, Firenze 1821, pag. 160.

(5) A. Verri, *I vulcani Cimini*, (Atti R. Acc. Lincei 1880).