ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

Escluso pertanto che l'angolo 2ϑ sia retto, le equazioni del nostro sistema sono risolubili rispetto alle sei derivate $\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)_0$, $\left(\frac{\partial y_i}{\partial v}\right)_0$, e $\Delta_0 = -\frac{1}{n\mathrm{A}_0}$, $\Delta'_0 = \frac{1}{n'\mathrm{A}'_0}$ riescono, come è necessario, diversi da zero.

Gioverà aggiungere, riportandosi ad una osservazione, fatta alla fine del § 2, che, nell' intorno considerato, *la soluzione del problema è, non solo geometricamente, ma anche fisicamente possibile.*

Meccanica. — *Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante.* Nota di D. De Francesco, presentata dal Socio Volterra.

Le equazioni differenziali che il sig. Heath stabilì nel 1884 per rappresentare il moto di un corpo rigido non sollecitato da forze in uno spazio ellittico (1), sono un caso particolare di quelle stabilite nel 1876 da Clifford nella sua Memoria: *On the Free Motion under no Forces of a Rigid System in an n-fold Homaloid* (2). Il Clifford tentò anche l' integrazione generale delle sue equazioni per mezzo di funzioni ϑ di $n-2=s$ argomenti, uno dei quali funzione lineare del tempo.

In uno spazio ellittico di tre dimensioni ($n=4$, $s=2$) la soluzione studiata dal sig. Heath viene a coincidere con quella proposta da Clifford. Ora avendo il sig. Heath dimostrato che in tal caso la soluzione è incompleta per difetto di numero delle costanti arbitrarie, se ne può concludere che è incompleta anche quella di Clifford, sebbene l' Heath non ne parli.

Le equazioni differenziali del moto di un corpo in uno spazio di quante si vogliano dimensioni furono anche trovate dal sig. Killing nel 1884 (3). Questi non si occupò della loro integrazione, ma a riguardo della soluzione di Clifford si esprime così: « Wenn Clifford aber behauptet, diese Gleichungen könnten durch einfache ϑ-Quozienten integrirt werden, so hat er zu bemerken vergessen, dass dieser Lösung, welche nur bei bestimmten Anfangsbedingungen möglich ist, der Charakter der Allgemeinheit fehlt ».

Dunque per uno spazio di curvatura costante di più di tre dimensioni, non vi è altra soluzione generale che quella data dal prof. Volterra (4) colla

(1) *On the Dynamics of a Rigid Body in Elliptic Space.* By R. S. Heath. Comunicated by Professor Cayley (Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year MDCCCLXXXIV, vol. 175, parte 1a).

(2) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VII, Jan. 1876.

(3) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 98°, 1885.

(4) Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXIII, 1898, pag. 558.

quale le caratteristiche si esprimono mediante serie di funzioni del tempo. Pel caso di tre dimensioni, oltre questa soluzione ed oltre quella da noi indicata in due Note precedenti [1], ve ne ha una terza che conduce direttamente alla determinazione esplicita dei due integrali che, aggiunti ai tre integrali primi quadratici del sig. Heath ed a quello da noi indicato nella prima delle due predette Note, completano l'integrazione delle sei equazioni differenziali.

Questa soluzione consiste, come vedremo qui appresso, nella determinazione di una funzione caratteristica del problema, dalla quale si deducono insieme coi sei integrali relativi alla velocità, gli altri sei relativi alla posizione del corpo.

Scriviamo le equazioni differenziali nella forma in cui le abbiamo messe alla fine della seconda delle Note citate.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(F\omega_4 \pm A\omega_1) - (G\omega_5 \pm B\omega_2)(\omega_6 \pm \omega_3) + (H\omega_6 \pm C\omega_3)(\omega_5 \pm \omega_2) = 0\,,\\ &\frac{d}{dt}(G\omega_5 \pm B\omega_2) - (H\omega_6 \pm C\omega_3)(\omega_4 \pm \omega_1) + (F\omega_4 \pm A\omega_1)(\omega_6 \pm \omega_3) = 0\,,\\ &\frac{d}{dt}(H\omega_6 \pm C\omega_3) - (F\omega_4 \pm A\omega_1)(\omega_5 \pm \omega_2) + (G\omega_5 \pm B\omega_2)(\omega_4 \pm \omega_1) = 0\,,\end{aligned}\right.$$

I quattro integrali quadratici si possono presentare sotto la forma:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &(F\omega_4+A\omega_1)(\omega_4+\omega_1)+(G\omega_5+B\omega_2)(\omega_5+\omega_2)+(H\omega_6+C\omega_3)(\omega_6+\omega_3)\\ &+(F\omega_4-A\omega_1)(\omega_4-\omega_1)+(G\omega_5-B\omega_2)(\omega_5-\omega_2)+(H\omega_6-C\omega_3)(\omega_6-\omega_3)=4h\,,\\ &\frac{A\omega_1^2}{B-H}+\frac{B\omega_2^2}{C-F}+\frac{C\omega_3^2}{A-G}=g\,,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(F\omega_4+A\omega_1)^2+(G\omega_5+B\omega_2)^2+(H\omega_6+C\omega_3)^2=K_1^2\,,\\ &(F\omega_4-A\omega_1)^2+(G\omega_5-B\omega_2)^2+(H\omega_6-C\omega_3)^2=K_2^2\,,\end{aligned}\right.$$

Il primo integrale è quello delle forze vive, la cui somma T è $= h$.

Supponiamo ora K_1 e K_2 entrambe diverse da zero, e poniamo:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &F\omega_4+A\omega_1=-K_1 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1\,, && F\omega_4-A\omega_1=K_2 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2\,,\\ &G\omega_5+B\omega_2=-K_1 \operatorname{sen}\theta_1 \cos\varphi_1\,, && G\omega_5-B\omega_2=-K_2 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi_2\,,\\ &H\omega_6+C\omega_3=K_1\cos\theta_1\,, && H\omega_6-C\omega_3=K_2\cos\theta_2\,.\end{aligned}\right.$$

Queste equazioni equivalgono alle (3), e noi sappiamo (Nota II) che tra le ω ed i sei parametri θ_1, φ_1, ψ_1, θ_2, φ_2, ψ_2, che determinano ad ogni istante

[1] Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXV, novembre 1899 e gennaio 1900. Avendo da citare in seguito queste Note, le indicheremo con Nota I e Nota II.

la posizione del mobile, sussistono altre sei equazioni di cui scriviamo solo le prime tre:

$$
(5)\quad \begin{cases} (\omega_4 + \omega_1)\,dt = \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\theta_1\, d\psi_1 - \cos\varphi_1\, d\theta_1\,, \\ (\omega_5 + \omega_2)\,dt = \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\theta_1\, d\psi_1 + \operatorname{sen}\varphi_1\, d\theta_1\,, \\ (\omega_6 + \omega_3)\,dt = d\varphi_1 - \cos\theta_1\, d\psi_1\,; \end{cases}
$$

le altre si deducono da queste cambiando le somme dei primi membri nelle differenze, e nei secondi membri l'indice 1 nell'indice 2. Queste sei equazioni d'altronde, insieme alle sei precedenti, soddisfanno identicamente le equazioni differenziali (1).

Con queste sostituzioni l'integrale (2) delle forze vive diviene:

$$
\begin{aligned}
&- K_1 \operatorname{sen}^2\theta_1 \frac{d\psi_1}{dt} + K_1 \cos\theta_1 \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - \cos\theta_1 \frac{d\psi_1}{dt}\right) \\
&- K_2 \operatorname{sen}^2\theta_2 \frac{d\psi_2}{dt} + K_2 \cos\theta_2 \left(\frac{d\varphi_2}{dt} - \cos\theta_2 \frac{d\psi_2}{dt}\right) = 4h\,,
\end{aligned}
$$

ossia:

$$
(6)\qquad K_1 \cos\theta_1\, d\varphi_1 + K_2 \cos\theta_2\, d\varphi_2 - K_1\, d\psi_1 - K_2\, d\psi_2 = 4h\, dt\,.
$$

Ora io dico che il primo membro di questa equazione è un differenziale esatto, ossia che se si esprimono $K_1 \cos\theta_1$ e $K_2 \cos\theta_2$ in funzione di φ_1 e φ_2, viene:

$$
(7)\qquad \frac{\partial(K_1 \cos\theta_1)}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial(K_2 \cos\theta_2)}{\partial\varphi_1}\,.
$$

Questa proprietà si può considerare come una conseguenza del teorema generale del prof. Volterra, citato nella Nota I, ma può anche essere dimostrata come segue.

Le equazioni che daranno $K_1 \cos\theta_1$ e $K_2 \cos\theta_2$ in funzione di φ_1 e di φ_2 sono gl'integrali (2) quando le ω siano espresse, in virtù delle (4), colle quattro quantità θ_1, φ_1, θ_2 e φ_2. Se ora, considerando θ_1 e θ_2 come funzioni di φ_1 e φ_2, deriviamo rispetto a φ_1 l'integrale delle forze vive, scritto nella forma solita

$$
A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + F\omega_4^2 + G\omega_5^2 + H\omega_6^2 = 2h\,,
$$

abbiamo:

$$
\omega_1 \frac{\partial(A\omega_1)}{\partial\varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial(B\omega_2)}{\partial\varphi_1} + \omega_3 \frac{\partial(C\omega_3)}{\partial\varphi_1} + \omega_4 \frac{\partial(F\omega_4)}{\partial\varphi_1} + \omega_5 \frac{\partial(G\omega_5)}{\partial\varphi_1} + \omega_6 \frac{\partial(H\omega_6)}{\partial\varphi_1} = 0,
$$

che può scriversi anche:

$$
\begin{aligned}
&(\omega_4 + \omega_1) \frac{\partial(F\omega_4 + A\omega_1)}{\partial\varphi_1} + (\omega_5 + \omega_2) \frac{\partial(G\omega_5 + B\omega_2)}{\partial\varphi_1} + (\omega_6 + \omega_3) \frac{\partial(H\omega_6 + C\omega_3)}{\partial\varphi_1} \\
&+ (\omega_4 - \omega_2) \frac{\partial(F\omega_4 - A\omega_1)}{\partial\varphi_1} + (\omega_5 - \omega_2) \frac{\partial(G\omega_5 - B\omega_2)}{\partial\varphi_1} + (\omega_6 - \omega_4) \frac{\partial(H\omega_6 - C\omega_3)}{\partial\varphi_1} = 0,
\end{aligned}
$$

e quindi per le (4)

$$-(\omega_4+\omega_1)\left[\frac{\partial(K_1\operatorname{sen}\theta_1)}{\partial\varphi_1}\operatorname{sen}\varphi_1+K_1\operatorname{sen}\theta_1\cos\varphi_1\right]$$

$$-(\omega_5+\omega_2)\left[\frac{\partial(K_1\operatorname{sen}\theta_1)}{\partial\varphi_1}\cos\varphi_1-K_1\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\varphi_1\right]+(\omega_6+\omega_3)\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial\varphi_1}$$

$$-(\omega_4-\omega_1)\frac{\partial(K_2\operatorname{sen}\theta_2)}{\partial\varphi_1}\operatorname{sen}\varphi_2$$

$$-(\omega_5-\omega_2)\frac{\partial(K_2\operatorname{sen}\theta_2)}{\partial\varphi_1}\cos\varphi_2+(\omega_6-\omega_3)\frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial\varphi_1}=0.$$

I primi tre termini di questa equazione, per le (5), si riducono a

$$-\frac{\partial(K_1\operatorname{sen}\theta_1)}{\partial\varphi_1}\operatorname{sen}\theta_1\frac{d\psi_1}{dt}+K_1\operatorname{sen}\theta_1\frac{d\theta_1}{dt}+\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial\varphi_1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{dt}-\cos\theta_1\frac{d\psi_1}{dt}\right),$$

cioè a

$$-\frac{d}{dt}(K_1\cos\theta_1)+\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt},$$

e gli altri tre termini si riducono nello stesso modo a

$$-\frac{\partial(K_2\operatorname{sen}\theta_2)}{\partial\varphi_1}\operatorname{sen}\theta_2\frac{d\psi_2}{dt}+$$

$$+\frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial\varphi_1}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}-\cos\theta_2\frac{d\psi_2}{dt}\right)=\frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_2}{dt};$$

e perciò sommando si avrà

$$-d(K_1\cos\theta_1)+\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial\varphi_1}d\varphi_1+\frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial\varphi_1}d\varphi_2=0.$$

Questa equazione, siccome

$$d(K_1\cos\theta_1)=\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial\varphi_1}d\varphi_1+\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial\varphi_2}d\varphi_2,$$

si riduce alla (7).

Poniamo adunque

$$\int(K_1\cos\theta_1\,d\varphi_1+K_2\cos\theta_2\,d\varphi_2)=2V;$$

ed avremo dalla (6)

$$(8)\qquad 2V-K_1\psi_1-K_2\psi_2=4ht+\text{cost}.$$

Ora io dico che ponendo:

$$(9)\qquad V-\tfrac{1}{2}K_1\psi_1-\tfrac{1}{2}K_2\psi_2-ht=W,$$

W è la funzione caratteristica del problema, poichè soddisfa alle condizioni che la definiscono, cioè

$$(10)\qquad \frac{dW}{dt}=T+U,\qquad \frac{\partial W}{\partial t}=-T+U,$$

essendo U la funzione delle forze ($=0$), e T la forza viva ($=h$).

E contiene tante costanti arbitrarie (h, g, K_1 e K_2) quante sono le variabili (φ_1, φ_2, ψ_1 e ψ_2). Si avrà dunque:

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial h} = \frac{1}{2}\displaystyle\int\left[\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial h}\,d\varphi_1 + \frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial h}\,d\varphi_2\right] - t = h', \\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial g} = \frac{1}{2}\displaystyle\int\left[\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial g}\,d\varphi_1 + \frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial g}\,d\varphi_2\right] = g', \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial K_1} = \frac{1}{2}\displaystyle\int\left[\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial K_1}\,d\varphi_1 + \frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial K_1}\,d\varphi_2\right] - \frac{1}{2}\psi_1 = K'_1, \\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial K_2} = \frac{1}{2}\displaystyle\int\left[\frac{\partial(K_1\cos\theta_1)}{\partial K_2}\,d\varphi_1 + \frac{\partial(K_2\cos\theta_2)}{\partial K_2}\,d\varphi_2\right] - \frac{1}{2}\psi_2 = K'_2, \end{cases}$$

essendo h', g', K'_1, K'_2 quattro nuove costanti arbitrarie.

Le equazioni (11) insieme coi quattro integrali quadratici (2) e (4) completano la soluzione del problema delle velocità. Esse infatti dànno φ_1 e φ_2 in funzione del tempo e di sei costanti arbitrarie h, g, K_1, K_2, h' e g'. Gl'integrali (2) daranno θ_1 e θ_2 in funzione di φ_1 e φ_2 e quindi in funzione del tempo e delle stesse sei costanti. Finalmente le (4) daranno le sei ω in funzione del tempo e delle sei costanti arbitrarie.

Per avere la funzione V, o per eseguire le integrazioni indicate in (11) e (12), bisogna esprimere, per mezzo delle (2), $K_1\cos\theta_1$ e $K_2\cos\theta_2$ in funzione di φ_1 e di φ_2. Ora queste equazioni, eliminando θ_2, dànno una risultante di ottavo grado rispetto a $\operatorname{sen}\theta_1$, ma che è di quarto grado rispetto a $\operatorname{sen}^2\theta_1$. Quindi $\cos\theta_1$ e $\cos\theta_2$ possono ottenersi esplicitamente in funzione di φ_1 e φ_2 per mezzo di radicali di secondo e terzo grado.

Finalmente le equazioni (12) dànno ψ_1 e ψ_2 di cui le ω non sono funzioni, ma che servono insieme alle altre quattro variabili φ_1, φ_2, θ_1 e θ_2 alla risoluzione del problema di posizione, come si è veduto nella Nota II. Le (12) corrispondono agl'integrali (16) di tale Nota.

La soluzione del problema di posizione non contiene che 8 costanti arbitrarie, ma la soluzione è generale, poichè quattro costanti sono nulle per la posizione degli assi, ciò che non implica alcuna restrizione nelle condizioni iniziali del movimento.

La soluzione data non regge quando una delle K, o entrambe le K siano nulle. Il primo caso, come si è veduto (Nota II), non può verificarsi che nello spazio ellittico, ed il secondo non può verificarsi che nello spazio iperbolico.

Nel primo caso, le sei equazioni (1) si possono ridurre a tre della stessa forma di quelle relative alla rotazione di un corpo intorno ad un punto, nello spazio ordinario. Supponiamo per esempio $K_2 = 0$. Per la seconda delle (3) si ha:

$$\omega_4 = \frac{A\omega_1}{F}, \quad \omega_5 = \frac{B\omega_2}{G}, \quad \omega_6 = \frac{C\omega_3}{H}, \tag{13}$$

e quindi non considerando delle (1) che quelle relative ai segni superiori, la prima si riduce a

$$2\frac{d}{dt}(A\omega_1) - 2B\omega_2\omega_3\left(1 + \frac{C}{H}\right) + 2C\omega_3\omega_2\left(1 + \frac{B}{G}\right) = 0, \tag{14}$$

e nello stesso modo si possono ridurre le altre due. Se ora poniamo

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{A}{1+\dfrac{A}{F}} = A', & \dfrac{B}{1+\dfrac{B}{G}} = B', & \dfrac{C}{1+\dfrac{C}{H}} = C', \\ \omega_1\left(1+\dfrac{A}{F}\right) = p, & \omega_2\left(1+\dfrac{B}{G}\right) = q, & \omega_3\left(1+\dfrac{C}{H}\right) = r, \end{array}\right. \tag{15}$$

l'equazione (14) e le altre due analoghe si riducono a

$$\left\{\begin{array}{l} A'\dfrac{dp}{dt} - (B' - C')\,qr = 0, \\ B'\dfrac{dq}{dt} - (C' - A')\,rp = 0, \\ C'\dfrac{dr}{dt} - (A' - B')\,pq = 0, \end{array}\right. \tag{16}$$

cioè alle equazioni differenziali di Eulero.

Nel caso di $K_1 = K_2 = 0$ invece delle (4) potremo porre (v. Nota II):

$$\left\{\begin{array}{l} F\omega_4 + A\omega_1 = K(i\cos\theta_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + \cos\varphi_1)e^{-i\psi_1}, \\ \qquad F\omega_4 - A\omega_1 = K'(-i\cos\theta_2 \operatorname{sen}\varphi_2 + \cos\varphi_2)\,e^{i\psi_2}, \\ G\omega_5 + B\omega_2 = K(i\cos\theta_1\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1)\,e^{-i\psi_1}, \\ \qquad G\omega_5 - B\omega_2 = K'(-i\cos\theta_2\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_2)\,e^{i\psi_2}, \\ H\omega_6 + C\omega_3 = Ki\operatorname{sen}\theta_1\,e^{-i\psi_1}, \qquad H\omega_6 - C\omega_3 = -K'i\operatorname{sen}\theta_2\,e^{i\psi_2}, \end{array}\right. \tag{17}$$

essendo K e K′ due costanti (immaginarie coniugate, come θ_1 e θ_2, φ_1 e φ_2).

Allora l'integrale delle forze vive diviene:

$$\begin{aligned} &Ke^{-i\psi_1}[(i\cos\theta_1\operatorname{sen}\varphi_1 + \cos\varphi_1)(\omega_4+\omega_1) \\ &\qquad + (i\cos\theta_1\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi_1)(\omega_5+\omega_2) + i\operatorname{sen}\theta_1(\omega_6+\omega_3)] \\ &- K'e^{i\psi_2}[(i\cos\theta_2\operatorname{sen}\varphi_2 - \cos\varphi_2)(\omega_4-\omega_1) + \\ &\qquad + (i\cos\theta_2\cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_2)(\omega_5-\omega_2) + i\operatorname{sen}\theta_2(\omega_6-\omega_3)] \end{aligned}$$

ed in virtù delle (5),

$$\mathrm{K}e^{-i\psi_1}[i \operatorname{sen}\theta_1\, d\varphi_1 - d\theta_1] - \mathrm{K}'e^{i\psi_2}[i \operatorname{sen}\theta_2\, d\varphi_2 + d\theta_2] = 4h\, dt .$$

Poniamo ora:

$$(18)\quad \begin{cases} \mathrm{K}ie^{-i\psi_1} \operatorname{sen}\theta_1 = \varrho_1 , & \varphi_1 + i\displaystyle\int \frac{d\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_1} = u_1 , \\ -\mathrm{K}'ie^{i\psi_2} \operatorname{sen}\theta_2 = \varrho_2 , & \varphi_2 - i\displaystyle\int \frac{d\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_2} = u_2 , \end{cases}$$

ed avremo:

$$(19)\qquad \varrho_1\, du_1 + \varrho_2\, du_2 = 4h\, dt .$$

D' altra parte, facendo le sostituzioni nelle (17) si trova:

$$(20)\quad \begin{cases} \mathrm{F}\omega_4 + \mathrm{A}\omega_1 = -\varrho_1 i \cos u_1 , & \mathrm{F}\omega_4 - \mathrm{A}\omega_1 = \varrho_2 i \cos u_2 , \\ \mathrm{G}\omega_5 + \mathrm{B}\omega_2 = \varrho_1 i \operatorname{sen} u_1 , & \mathrm{G}\omega_5 - \mathrm{B}\omega_2 = -\varrho_2 i \operatorname{sen} u_2 , \\ \mathrm{H}\omega_6 + \mathrm{C}\omega_3 = \varrho_1 , & \mathrm{H}\omega_6 - \mathrm{C}\omega_3 = \varrho_2 , \end{cases}$$

e per mezzo di queste sostituzioni nelle (2), ϱ_1 e ϱ_2 divengono funzioni di u_1 e u_2, e quindi operando sull' equazione delle forze vive analogamente a quanto fu fatto nel caso generale, si trova:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u_2} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial u_1} .$$

Ponendo dunque:

$$(21)\qquad \int (\varrho_1\, du_1 + \varrho_2\, du_2) = 2\mathrm{V} ,$$

avremo dalla (19)

$$\mathrm{V} = 2ht + \text{cost} ,$$

e la funzione caratteristica sarà:

$$(22)\qquad \mathrm{W} = \mathrm{V} - ht .$$

Essa infatti soddisfa alle condizioni espresse dalle (10) e contiene tante costanti arbitrarie (h , g), quante sono le variabili che contiene (u_1 , u_2). Si avrà quindi:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial h} = \tfrac{1}{2}\displaystyle\int \left[\frac{\partial \varrho_1}{\partial h}\, du_1 + \frac{\partial \varrho_2}{\partial h}\, du_2 \right] - t = h' , \\ \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial g} = \tfrac{1}{2}\displaystyle\int \left[\frac{\partial \varrho_1}{\partial g}\, du_1 + \frac{\partial \varrho_2}{\partial g}\, du_2 \right] = g' , \end{cases}$$

essendo h' e g' due nuove costanti arbitrarie.

Le equazioni (23) dànno u_1 e u_2 in funzione del tempo e di quattro costanti arbitrarie h, g, h' e g': gl'integrali (2) daranno ϱ_1 e ϱ_2 in funzione di t e delle stesse costanti: finalmente le (20) forniranno le sei velocità angolari in funzione sempre di t, h, g, h' e g'.

Per eseguire le integrazioni indicate nelle (23) bisogna esprimere, per mezzo delle (2), ϱ_1 e ϱ_2 in funzione di u_1 ed u_2. L'equazione risultante che si ottiene dalle (2) eliminando ϱ_2, è di quarto grado rispetto a ϱ_1, ma è di secondo grado rispetto a ϱ_1^2. Quindi ϱ_1 e ϱ_2 possono ottenersi esplicitamente per mezzo di radicali di secondo grado.

La posizione del corpo in questo caso si determina nel modo indicato nella Nota II.

Fisica. — *Il fenomeno di Hall in un liquido non elettrolita* (1). Nota dei dottori L. Amaduzzi e L. Leone, presentata dal Socio A. Righi.

Tutti coloro che si sono occupati di stabilire se nei liquidi si produce il fenomeno di Hall, hanno sperimentato su lamine liquide elettrolitiche, se si eccettua il prof. Roiti che sperimentò anche con una lamina di mercurio. Di qui la controversia fra chi sostiene (2) l'esistenza del fenomeno e coloro (3) che la negano, attribuendo l'osservato spostamento delle linee equipotenziali ad azioni secondarie svolte nella massa liquida.

Ci parve utile vedere se il fenomeno di Hall si verificasse nell'amalgama liquida di bismuto, poichè, oltre ad essere liquido non elettrolita, contiene un corpo, che allo stato solido presenta il fenomeno al massimo grado (4).

Nelle nostre ricerche, invece di adoperare lastrine nella forma di croce alla maniera classica di Hall, credemmo opportuno, data l'impossibilità di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Bologna.

(2) H. Bagard, *Sur le phénomène de Hall dans les liquides:* C. R., CXXII, 1896, 1, pag. 77. — Journ. de Phys., serie III, t. V, pag. 499, 1896. C. R., t. CXXIII, 1896, 2, pag. 1270. — *Sopra la realtà del fenomeno di Hall nei liquidi.* N. Cim., serie IV, t. 7, pag. 187, 1898.

(3) Roiti, *Ricerca del fenomeno di Hall nei liquidi.* Atti della R. Accademia dei Lincei, serie III, t. 12, pag. 397, 1882.

Florio, *Il fenomeno di Hall nei liquidi.* N. Cim., serie IV, t. IV, pag. 106, 1897; t. VI, pag. 108, 1897.

Chiavassa, *Il fenomeno di Hall nei liquidi.* L'Elettricista, 1897, N. 10, pag. 229.

(4) Righi, *Ricerche sperimentali sul fenomeno di Hall particolarmente nel bismuto.* N. Cim., serie III, t. 15, pag. 115, 1884.