ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

② RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 giugno 1900.

A. Messedaglia Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *I gruppi neutri con elementi multipli, in un' involuzione sopra un ente razionale.* Nota di Francesco Severi, presentata dal Corrispondente Segre.

In questa breve Nota darò una formola che risolve in tutta la sua estensione il problema dei gruppi neutri con elementi multipli per un' involuzione I_r^n d'ordine n e specie r, data sopra una retta, e ne esporrò sommariamente la dimostrazione.

Il problema di cercare quanti sono i gruppi di un numero assegnato di punti che sono neutri di data specie per una I_r^n, fu già risoluto prima dal Meyer (1) e poi, indipendentemente, dal Tanturri (2); ed è essenziale per il nostro scopo tener presente questo risultato.

Assumiamo come imagine della data involuzione I_r^n, quella che è segnata sopra una curva razionale C d'ordine n immersa in uno spazio S_r, dagli iperpiani di questo spazio. Allora richiedere quanti sono i gruppi della I_r^n costituiti ognuno da un punto ν_1-plo, da un punto ν_2-plo, ..., da un punto ν_t-plo (essendo le ν maggiori od uguali ad 1), e che sono

(1) Cfr. F. Meyer, *Apolarität und rationale Curven.* Tübingen, 1883 (v. a pag. 363).

(2) Cfr. Tanturri, *Ricerche sugli spazî plurisecanti di una curva algebrica.* (Annali di Matematica, (3), t. IV, 1900).

per essa involuzione neutri di specie q, equivale a richiedere quanti sono gli spazî a $\sum_{1}^{t}{}_i\, \nu_i - q - 1 \, (=k)$ dimensioni che hanno con C contatti ν_1-punto, ..., ν_t-punto. Perchè degli S_k siffatti esistano, e in numero finito, occorre e basta (in generale) che siano soddisfatte le due condizioni:

$$
(1) \qquad \begin{cases} (r-k) \sum_{1}^{t}{}_i\, \nu_i - t = (k+1)(r-k)\,, \\ n \geq \sum_{1}^{t} \nu_i + r - k - 1\,. \end{cases}
$$

Orbene, se tali condizioni sono soddisfatte, denotando con

$$
[n, r, k;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t]
$$

il numero di cui ci occupiamo, si ha

$$
(2) \qquad [n, r, k;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t] =
$$

$$
= \frac{\nu_1\,\nu_2 \ldots \nu_l}{\alpha!\,\beta! \ldots \delta!}\, l!\, \binom{t}{l} \frac{\binom{n-k-1}{r-k}\binom{n-k-2}{r-k}\cdots\binom{n-k-q+1}{r-k}\binom{n-k-q}{r-k}}{\binom{r-k+q-1}{r-k}\binom{r-k+q-2}{r-k}\cdots\binom{r-k+1}{r-k}\binom{r-k}{r-k}}\,.
$$

Ivi le ν si suppongon disposte in ordine decrescente; l denota il numero di quelle diverse da 1, α il numero di quelle uguali a ν_1, β il numero di quelle uguali a $\nu_{\alpha+1}$, ..., δ il numero di quelle uguali a ν_l.

Giacchè la formola ora scritta è vera quando $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_t = 1$, volendo far vedere che essa è vera qualunque siano le ν, supporremo qualcuna di esse diversa da 1, e inoltre supporremo le ν tali che le (1) sian soddisfatte. Ciò posto, ammettiamo vera la (2) in ogni spazio di dimensione inferiore ad r e distinguiamo il caso in cui $\nu_l > 2$, dal caso in cui $\nu_l = 2$. Nel primo caso chiamiamo omologhi due punti A, A′ di C quando esiste un S_k che incontra semplicemente la C in $t - l + 1$ punti, fra cui A, ed ha ancora con C contatti ν_1 — punto, ..., ν_{l-1} — punto e $(\nu_l - 1)$ — punto in A′. Gli indici della corrispondenza sono:

$$
[n-\nu_l+1,\, r-\nu_l+1,\, k-\nu_l+1;\ \nu_1, \ldots, \nu_{l-1}, \nu_{l+1}, \ldots, \nu_t, 1](t-l+1),
$$
$$
[n-1, r-1, k-1; \nu_1, \ldots, \nu_{l-1}, \nu_l - 1, \ldots \nu_t]
$$

come si rileva tenendo presenti le (1) e proiettando una volta da A e una volta dall' $S_{\nu_l - 2}$ osculatore a C in A′.

Le coincidenze di questa corrispondenza si hanno nei punti in cui gli S_k di cui si vuole il numero, hanno con C contatti d'ordine $\nu_l - 1$, e precisamente per ognuno di quegli S_k si hanno δ coincidenze. Onde, in virtù del principio di corrispondenza di Chasles, si ha

$$[n, r, k; \nu_1, \dots, \nu_t] = \frac{t-l+1}{\delta}[n-\nu_l+1, r-\nu_l+1, k-\nu_l+1; \nu_1, \dots, \nu_t, 1] +$$
$$+\frac{1}{\delta}[n-1, r-1, k-1;\ \nu_1, \dots, \nu_{l-1}, \nu_l-1, \dots, \nu_t],$$

che si riduce subito alla (2) se al posto dei simboli che compariscono nel secondo membro, si sostituiscono le espressioni ch'essi denotano. Nel caso in cui $\nu_l = 2$, basterà considerare su C una corrispondenza involutoria chiamando omologhi due punti della curva quando esiste un S_k passante semplicemente per ognuno di essi che incontra semplicemente C in $t-l+1$ altri punti, e che ha inoltre con la curva medesima contatti ν_1 — punto, ..., ν_{l-1} — punto. In tal modo troveremo

$$[n, r, k;\ \nu_1, \dots, \nu_t] =$$
$$= 2(t-l+1)[n-1, r-1, k-1;\ \nu_1, \dots, \nu_{l-1}, \nu_{l+1}, \dots \nu_t, 1],$$

la quale, sostituendo al posto di $[n-1, r-1, k-1, \nu_1, \dots, \nu_t, 1]$ il suo valore, si riduce alla (2) (¹).

La formola (2) è atta non solo a risolvere il problema che ci siamo proposti, enunciato nelle due maniere or ora considerate, ma anche a risolvere un gran numero di questioni che provengono dalla considerazione di una involuzione segnata sopra una curva razionale di S_r dalle *forme* (varietà ad $r-1$ dimensioni) di un dato sistema. Si possono ad esempio, grazie alla (2), estendere i teoremi che il Deruyts dà alla fine della Nota citata a pie' di pagina.

(¹) Per $k = r-1$ la (2) dà una nota formola di De-Jonquières per le curve razionali. Cfr. De-Jonquières, *Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque*, etc. (Crelle, Bd. 66, 1866).

Il sig. Deruyts in una sua Nota: *Sur les groupes neutres*, etc. (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, (3), t. 35, 1898), dà una proposizione che equivale a questa: *Una curva razionale* C^n *ammette* $t!\,\nu_1 \dots \nu_t \binom{n+t-r-1}{t}$ *spazi* S_{r-t} *aventi con essa contatti* ν_1 *- punto, ...,* ν_t *- punto, essendo* $\sum_1^t \nu_i = r-t+2$. È necessario avvertire che, come rilevasi dalla (2), essa è valida solo quando le ν son diverse fra loro.