ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica a due variabili.* Nota di A. VITERBI, presentata dal Corrispondente G. RICCI.

§ 1°

Il problema del quale mi propongo di trattare in questa Nota un caso particolare consiste in ciò: « Sia dato un sistema materiale S avente i vincoli indipendenti dal tempo: dicansi x_i $(i = 1, 2 \ldots n)$ le coordinate lagrangiane che ne fissano la posizione, X_i le forze che lo sollecitano secondo tali coordinate, forze che si supporranno *indipendenti dalle velocità*. Saranno quindi:

$$\text{(A)} \qquad \begin{gathered} T = \frac{1}{2} \sum_{rs} a_{rs}\, x'_r\, x'_s \\ \frac{d \dfrac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i \quad (i = 1, 2 \ldots n) \end{gathered}$$

rispettivamente la forza viva e le equazioni del moto del sistema in discorso. Ciò posto si ricerchino tutti i sistemi d'equazioni dinamiche le cui traiettorie siano le stesse che appartengono al sistema (A) ».

I sistemi d'equazioni dinamiche aventi le stesse traiettorie si dicono corrispondenti (¹). Il prof. Levi Civita (²) risolse completamente questo problema per il caso in cui non agiscono forze, riconducendolo al problema seguente:

« Data una varietà φ, in cui il quadrato dell'elemento lineare sia $2T dt^2 = \Sigma_{rs} A_{rs}\, dx'_r\, dx'_s$ determinare tutte le varietà Φ rappresentabili (almeno in una certa regione), univocamente su φ, in modo che ad ogni geodetica di Φ corrisponde una geodetica di φ ».

L'equivalenza di questo problema con quello originariamente enunciato dipende dal fatto che dati due sistemi corrispondenti d'equazioni dinamiche (A), (A′) a cui corrispondano rispettivamente le forme differenziali quadratiche $ds^2 = T dt^2$, $ds_1^2 = 2T_1\, dt_1^2$ [ove designino rispettivamente T_1, t_1 la forza viva ed il tempo nel sistema (A′)], le geodetiche delle due va-

(¹) Per questo punto, come per tutto ciò che riguarda i problemi che si connettono a quello enunciato e il modo e i limiti in cui furono risoluti, v. Levi Civita: *Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche* (Introduzione). Annali di matematica pura ed applicata, 1896.

(²) Mem. cit.

rietà, i cui elementi lineari siano rispettivamente ds, ds_1 coincidono, qualora nei due ristemi (A), (A') non agiscano forze. Ma se invece agiscono forze, tale coincidenza dalle geodetiche non si verifica più in generale, e perciò la corrispondenza di due sistemi d'equazioni dinamiche si distingue, in tal caso in due specie, dicendosi di I^a specie se le geodetiche delle due varietà aventi rispettivamente per quadrato dell'elemento lineare le forme differenziali quadratiche corrispondenti ai sistemi in discorso coincidono, di II^a specie se la coincidenza delle geodetiche non ha luogo. Pei sistemi corrispondenti di I^a specie sussistono poi le proprietà stabilite dal prof. Levi Civita.

Il sig. Painlevè, in una sua Nota [1] che fa seguito ad una Memoria da lui precedentemente pubblicata [2], enuncia, senza dimostrazione, alcuni teoremi e risultati da lui ottenuti intorno ai sistemi corrispondenti d'equazioni dinamiche. Uno dei teoremi da lui enunciati è questo:

« Sia un sistema (A) d'equazioni dinamiche nel quale il numero delle variabili (coordinate lagrangiane del sistema materiale il cui movimento è rappresentato dal sistema in discorso) sia 2. Relativamente a questo sistema agiscano forze ammettenti un potenziale U; e sia (A_1) un corrispondente di I^a specie di (A). Sia ds^2 la forma differenziale quadratica corrispondente ad (A) (ben inteso, nel senso sopra indicato); e dicasi A'_1 un corrispondente di I^a specie del sistema, a cui corrispondono la forma differenziale quadratica: $ds^2 = (U + h)\, ds^2$ e la funzione potenziale $\dfrac{1}{U+h}$ (h costante arbitraria): (A'_1) sarà allora corrispondente di II^a specie di (A_1) e con questo procedimento si hanno tutti i corrispondenti di II^a specie ».

Ora l'intento prefissomi in questa Nota si fu di dimostrare l'enunciato teorema, venendo così a determinare effettivamente *tutti* i corrispondenti di II^a specie d'un sistema d'equazioni dinamiche a due variabili. Facendo tale ricerca, pervenni anche a un criterio riguardante la corrispondenza di II^a specie, la quale sotto certe condizioni esiste fra due sistemi d'equazioni dinamiche a due variabili, tali che le forme differenziali quadratiche ad essi corrispondenti siano entrambe, mercè cambiamenti di variabili, riducibili alla forma di Liouville.

§ 2°

Sia un sistema d'equazioni dinamiche (A) a due variabili a cui competano una forza viva $T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, x'_r\, x'_s$ e le forze: X_1, X_2 ed un altro sistema d'equazioni dinamiche (A') ad esso corrispondente, a cui competano

[1] *Sur les trasformations des équations de la dynamique.* Comptes rendus ecc. 1896.
[2] *Sur les transform. des équations de la dynamique.* Journal de Mathématique 1894.

una forza viva: $T_1 = \frac{1}{2} \sum_2^2 \alpha_{r_s} x'_r x'_s$, e forze che si deducono da X_1, X_2 mediante formole stabilite dal prof. Levi Civita (Mem. cit.). È noto che allora per le forme differenziali quadratiche:

$$ds^2 = \sum_1^2{}_{r_s} a_{r_s} dx_r dx_s \quad ds_1^2 = \sum_1^2{}_{r_s} \alpha_{r_s} dx_r dx_s$$

esiste un sistema doppio ortogonale di linee [1] che assunto come sistema di riferimento permette di dare a ds^2 la forma

$$\sum_1^2{}_i H_i^2 dx_i^2, \text{ a } ds_1^2 \text{ la forma } \sum_1^2{}_i \varrho_i H_i^2 dx_i^2.$$

Di più, affinchè il sistema (A) ammetta un corrispondente, è necessario che esso, qualora non agiscano forze ammetta un integrale primo quadratico [2]:

$$(1) \qquad \sum_1^2{}_{rs} dr_{rs} x'_r x'_s = \text{costante}$$

A tale proposito conviene distinguere due casi. Il primo è quello in cui non esista alcun integrale primo quadratico distinto da quello delle forze vive, col quale allora dovrà coincidere l' integrale dato dalla (1). Il secondo caso è quello, in cui esista un integrale primo quadratico, diverso da quello delle forze vive che sia integrale primo delle geodetiche della superficie d' elemento lineare ds.

Nel primo caso, che è quello che tratteremo nel presente § dovrà evidentemente essere:

$$d_{11} = H_1^2, \quad d_{22} = H_2^2, \quad d_{12} = d_{21} = 0.$$

Di più dalle formole stabilite dal prof. Levi Civita (Mem. cit. passim) si deduce agevolmente che l' equivalenza dei sistemi (A), (A') è rappresentata dai sistemi d' equazioni:

$$(2) \qquad \frac{\partial(\log H_1^2 + 2Z)}{\partial x_2} - \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial(U + 2Z)}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial(\log H_2^2 + 2Z)}{\partial x_1} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial(U + 2Z)}{\partial x_1} = 0$$

$$(2') \quad \frac{\partial(U + \log \varrho_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial(U + \log \varrho_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial(U + \log \varrho_1)}{\partial x_1} =$$

$$= - \frac{\partial(U + 2Z)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial(U + \log \varrho_2)}{\partial x_2} = - \frac{\partial(U + 2Z)}{\partial x_2}$$

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 57.

[2] Levi Civita, *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*. Atti dell'Acc. di Torino 1896. Siccome questa Nota non verrà più citata nel seguito, coll'espressione Mem. cit. che comparirà più innanzi si intenderà sempre d'alludere all'altra Memoria citata precedentemente.

In queste equazioni Z designi la funzione di x_1, x_2 data dalle relazioni: $X_i = \frac{\partial Z}{\partial x_i} e^{2Z}$ $(i = 1, 2)$, relazioni che ci dicono intanto che affinchè il sistema (A) ammetta un corrispondente (A′), è necessario che le forze relative ad esso ammettano un potenziale, che sarà $P = \frac{1}{2} e^{2Z} + h'$ (h' costante arbitraria). Di più U sia $= Z + \log \mu$, ove con μ si designi il valore che per $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$ assume la funzione $\frac{dt}{dt_1} = f$ tale che designandosi con t il tempo nel sistema (A), con t_1 il tempo nel sistema (A′), la sostituzione di $\frac{dt}{f}$ a dt_1 nello stesso (A′) lo faccia coincidere con (A). (V. Levi Civita, Mem. cit.).

Si tratta adunque di determinare $H_1^2, H_2^2, \varrho_1, \varrho_2, U, Z$ dalle (2), (2′), in modo che i sistemi (A), (A′) a cui tali quantità competono siano corrispondenti. In primo luogo dalle (2′) si ricava subito:

$$\varrho_1 e^U = f_1, \quad \varrho_2 e^U = f_2, \quad U + 2Z = \log \frac{1}{f_1 f_2} + K, \tag{3}$$

designandosi con f_1 una funzione della sola x_1, con f_2 una funzione della sola x_2 con K una costante arbitraria. È quindi: $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{f_2}{f_2}$. Pertanto le (3) danno:

$$U = -(\log f_1 + \log f_2) + K - 2Z, \quad \varrho_1 = 2f_1^2 f_2 (P + h), \quad \varrho_2 = 2f_2^2 f_2 (P + h)$$

(h costante arbitraria).

Sostituendo nelle (2) ad U, ϱ_1, ϱ_2 rispettivamente i valori testè trovati, queste divengono:

$$\frac{\partial \{\log H_1^2 + 2Z\}}{\partial x_2} - \frac{f_1}{f_1 - f_2} \frac{\partial \log f_2}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial \{\log H_1^2 + 2Z\}}{\partial x_2} + \frac{\partial \log (f_1 - f_2)}{\partial x_2} - \frac{d \log f_2}{dx_2} = 0$$

$$\frac{\partial \{\log H_2^2 + 2Z\}}{\partial x_1} + \frac{f_2}{f_1 - f_2} \frac{\partial \log f_2}{\partial x_1} = 0 = \frac{\partial \{\log H_2^2 + 2Z\}}{\partial x_1} + \frac{\partial \log (f_1 - f_2)}{\partial x_1} - \frac{d \log f_1}{dx_1} = 0.$$

Da queste equazioni si ricava immediatamente:

$$H_1^2 e^{2Z} = 2H_1^2 (P + h) = \frac{f_1 - f_2}{f_2 \varphi_1}, \quad H_2^2 e^{2Z} = H_2^2 (P + h) = \frac{f_1 - f_2}{f_1 \varphi_2}$$

designandosi con φ_1 una funzione arbitraria della sola x_1, con φ_3 una della sola x_2, pure arbitraria. Così

$$ds^2 = \frac{f_1 - f_2}{2f_2\,\varphi_1(\mathrm{P}+h)}\,dx_1^2 + \frac{f_1 - f_2}{2f_1\,\varphi_2(\mathrm{P}+h)}\,dx_2^2\,,\quad (\mathrm{P}+h)\,ds^2 = \frac{f_1 - f_2}{2f_2\,\varphi_1}\,dx_1^2 + \frac{f_1 - f_2}{2f_2\,\varphi_2}\,dx_2^2$$

e il sistema dinamico (A) ammetterà un sistema corrispondente di II^a specie (A′) a cui corrisponderà la forma differenziale quadratica:

$$ds_1^2 = \frac{(f_1 - f_2)f_1^2}{\varphi_1}\,dx_1^2 + \frac{(f_1 - f_2)f_2^2}{\varphi_2}\,dx_2^2\,.$$

Sostituendo alle variabili x_1, x_2 rispettivamente le

$$\int \frac{f_1}{\sqrt{\varphi_1}}\,dx_1\,,\quad \int \frac{f_2}{\sqrt{\varphi_1}}\,dx_2$$

e designando ora le nuove variabili con x_1, x_2, $(\mathrm{P}+h)\,ds^2$ assumerà la forma:

$$\frac{f_1 - f_2}{2f_1^2 f_2}\,dx_1^2 + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 f_2^2}\,dx_2^2\,,$$

mentre ds_1 assumerà la forma di Liouville:

$$(f_1 - f_2)(dx_1^2 + dx_2^2)\,.$$

Dalla forma così assunta dai $(\mathrm{P}+h)ds^2$ si deduce, in base al risultato stabilito dal prof. Levi Civita (Mem. cit.), che il sistema d'equazioni dinamiche a cui competono la forma differenziale quadratica:

$$(\mathrm{P}+h)\,ds^2$$

e la funzione potenziale: $\frac{1}{\mathrm{P}+h}$, è corrispondente di I^a specie del sistema (A′), e che *tutti* i corrispondenti di II^a specie di (A) sono al pari di (A′) corrispondenti di I^a specie del sistema, a cui compete la forma differenziale quadratica: $(\mathrm{P}+h)\,ds^2$ conformemente al teorema del sig. Painlevè enunciato nel § 1°. E riescono quindi determinate anche μ e $f = \frac{dt}{dt_1}$.