ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia per la seduta del 18 febbraio 1900.

Matematica. — *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica a due variabili.* Nota di A. Viterbi, presentata dal Corrispondente G. Ricci.

In una Nota precedente [1], recante lo stesso titolo di questa, diedi il metodo con cui determinare tutti i sistemi d'equazioni dinamiche che siano corrispondenti di II^a specie d'un dato sistema (A) d'equazioni dinamiche a due variabili che non abbia altro integrale primo quadratico all'infuori di quello delle forze vive. (Per tutte le denominazioni e convenzioni vedasi la Nota precedente testè citata: così pure sono mantenute le stesse notazioni introdotte in quella: i numeri con cui sono contrassegnate formole od equazioni, qualora non se ne faccia speciale menzione, s'intenderanno riferiti ad equazioni e formole della presente Nota). Ora in questa Nota mi propongo di fare analoga ricerca per i sistemi d'equazioni dinamiche a due variabili, i quali ammettano un integrale primo quadratico distinto da quello delle forze vive. Con ciò compio la dimostrazione del teorema del sig. Painlevè enunciato nella Nota precedente e stabilisco la proposizione pure colà enunciata.

Si consideri pertanto ancora un sistema d'equazioni dinamiche a due variabili, il quale ammetta però un integrale primo quadratico distinto da quello delle forze vive. Sia allora quest'integrale dato dall'equazione (1) della Nota precedente, la quale, come s'è detto, dovrà essere un integrale primo delle geodetiche della superficie il cui elemento lineare è ds. Come si sa dalla teoria delle superficie [2] esisterà un sistema ortogonale isotermo nella superficie d'elemento lineare ds, che assunto come sistema di riferimento permette di dare a ds^2 la forma:

$$ds^2 = (f_1 - f_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$$

designando f_1 una funzione della sola x_1, f_2 una funzione della sola x_2. Manteniamo poi, come si disse, in tutto e per tutto, per ciò che riguarda (A) e il corrispondente di II^a specie (A′) di cui si tratta di stabilire l'esistenza e compiere la ricerca le notazioni sin qui usate.

(1) Questi Rendiconti, pag. 66.
(2) Ricci, *Lezioni* (*litografate*) *della teoria sulle superficie*, paragrafo 106.

Ora a che la (1) della Nota precedente sia un integrale primo delle geodetiche della superficie d' elemento lineare ds, è necessario e basta che sia (1)

$$d_{12} = f_2(f_2 - f_2) \quad d_{22} = f_1(f_1 - f_2) \quad d_{12} = d_{21} = 0 .$$

Nel nostro caso si ha, come si deduce dalle formole di Levi Civita

$$f_2 \, X_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1} e^{2Z}, \quad f_1 \, X_2 = \frac{\partial Z}{\partial x_2} e^{2Z}, \quad H_1^2 = H_2^2 = f_1 - f_2$$
$$\alpha_{11} = \varrho_1(f_1 - f_2), \quad \alpha_{22} = \varrho_2(f_1 - f_2), \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0.$$

Così collo stesso procedimento usato per il caso precedentemente trattato si perviene ad ottenere come condizione necessaria e sufficiente alla corrispondenza di (A), (A′) i sistemi d' equazioni:

$$(1) \qquad \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{f_1 - f_2} \frac{d f_2}{d x_2} + \varrho_1 \frac{\partial U}{\partial x_2} + 2 \frac{f_2}{f_1} \varrho_2 \frac{\partial Z}{\partial x_2} = 0$$
$$\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{f_1 - f_2} \frac{d f_1}{d x_1} - \varrho_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} - 2 \frac{f_1}{f_2} \varrho_1 \frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0$$

$$(1') \qquad \frac{\partial (U + \log \varrho_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial (U + \log \varrho_2)}{\partial x_1} = 0 , \quad \frac{\partial (U + \log \varrho_1)}{\partial x_1} = - \frac{\partial (U + 2Z)}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial (U + \log \varrho_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial (U + 2Z)}{\partial x_2}$$

Dalle (1′) si ricava subito, come nel caso esaminato nella Nota precedente:

$$\varrho_1 \, e^{U} = \psi_1 , \quad \varrho_2 \, e^{U} = \psi_2 , \quad -(U + 2Z) = \log(\psi_1 \, \psi_2) + K$$

designandosi con ψ_1 una funzione affatto arbitraria della sola x_1, con ψ_2 una funzione pure arbitraria di x_2 soltanto, con K una costante arbitraria. Così si saranno determinati ϱ_1, ϱ_2 quando, mediante le (3), si saranno determinate U, Z, poichè:

$$U = -\log(\psi_1 \, \psi_2) - 2Z + K , \quad \varrho_1 = \psi_1^2 \, \psi_2 \, e^{2Z+K} , \quad \varrho_2 = \psi_2^2 \, \psi_1 \, e^{2Z+K} .$$

Per determinare dunque U, Z, diviso il primo membro di ciascuna delle (1) per $\varrho_1 - \varrho_2$, si pongano in queste equazioni al posto di ϱ_1, ϱ_2, Z le loro

(1) Ricci, op. cit. ibid. Levi Civita, Mem. cit., pag. 34.

espressioni fornite dalle (1′). Con ciò le (1) assumeranno la forma:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{1}{f_1 - f_2}\frac{df_2}{dx_2} - \frac{\psi_1}{\psi_2 - \psi_1}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2} - \frac{\psi_2}{\psi_1 - \psi_2}\frac{f_2}{f_1}\left(\frac{d \log \psi_2}{dx_2} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2}\right) = 0\\
&\frac{1}{f_1 - f_2}\frac{df_1}{dx_1} + \frac{\psi_2}{\psi_1 - \psi_2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1} - \frac{\psi_1}{\psi_1 - \psi_2}\frac{f_1}{f_2}\left(\frac{d \log \psi_1}{dx_1} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1}\right) = 0 .
\end{aligned}
$$

Dalle (2) si ricava:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1} &= \frac{f_1 \psi_1^1}{f_2\psi_2 - f_1\psi_1} - \frac{f_1^1 f_2(\psi_1 - \psi_2)}{(\psi_2 f_2 - \psi_1 f_1)(f_1 - f_2)} = \mathrm{Q}_1\\
\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2} &= -\frac{\psi_2^1 f_2}{f_2\psi_2 - f_1\psi_1} + \frac{f_2^1 f_1(\psi_1 - \psi_2)}{(\psi_2 f_2 - \psi_1 f_1)(f_1 - f_2)} = \mathrm{Q}_2 .
\end{aligned}
$$

(dove con f'_1, f'_2 ecc., si designino le derivate di queste funzioni rispetto alle variabili da cui dipendono). Ora Q_1, Q_2 devono naturalmente rendere soddisfatta la condizione differenziale:

$$\frac{\partial \mathrm{Q}_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathrm{Q}_2}{\partial x_1}$$

Un calcolo materiale ne mostra che così accade infatti e facilmente ricaviamo dalle (3):

$\mathrm{U} = \log \dfrac{f_1 - f_2}{f_2\psi_2 - f_1\psi_1} + \mathrm{C}_1$, ed essendo $-\mathrm{U} - 2\mathrm{Z} = \log \psi_1\psi_2 + \mathrm{C}_2$ ($\mathrm{C}_1 . \mathrm{C}_2$ costanti arbitrarie) si ha:

(4) $\mathrm{Z} = \dfrac{1}{2}\log \dfrac{(f_2\psi_2 - f_1\psi_1)}{(f_1 - f_2)\psi_1\psi_2}$ (prescindendo dalle costanti arbitrarie che si possono porre tutte $= 0$).

Così dalle formole precedenti si ricava:

$$\varrho_1 = \frac{\psi_1(\psi_2 f_2 - \psi_1 f_1)}{f_1 - f_2}, \quad \varrho_2 = \frac{\psi_2(\psi_2 f_2 - \psi_1 f_1)}{f_1 - f_2}, \quad e^{2z} = \frac{f_2\psi_2 - f_1\psi_1}{(f_1 - f_2)\psi_1\psi_2},$$

ossia

$$\mathrm{X}_1 = \frac{1}{2f_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{f_2\psi_2 - f_1\psi_1}{(f_1 - f_2)\psi_1\psi_2}, \quad \mathrm{X}_2 = \frac{1}{2f_2}\frac{f_2\psi_2 - f_1\psi_1}{(f_1 - f_2)\psi_1\psi_2} .$$

Queste sono dunque le forze che devono agire nel movimento rappresentato dal sistema (A) affinchè questo ammetta un corrispondente di II^{a} specie (A′). La forma differenziale quadratica che compete a quest' ultimo sarà dunque:

$$(5)\qquad ds_1^2 = (f_2\psi_2 - f_1\psi_1)\psi_1 dx_1^2 + (f_2\psi_2 - f_1\psi_1)\psi_2 dx_2^2 .$$

E mediante le formole stabilite si possono calcolare *tutti* i corrispondenti di II^a specie di (A').

Mediante poi la sostituzione delle variabili $\int\sqrt{\psi_1}\,dx_1$, $\int\sqrt{\psi_2}\,dx_2$ rispettivamente alle x_1, x_2 ds_2 è ricondotto (ove si designino pure con x_1, x_2 le nuove variabili) alla forma di Liouville:

$$ds_1^2 = (f_2\,\psi_2 - f_1\,\psi_1)(dx_1^2 + dx_2^2)\,.$$

Siccome ψ_1, ψ_2 sono funzioni, come s'è detto, affatto arbitrarie l'una di x_1, l'altra di x_2, dalla forma data a ds_1^2 si deduce la seguente proposizione alla quale accennai nel § I della Nota precedente:

« Due sistemi d'equazioni dinamiche a due variabili, tali che i quadrati degli elementi lineari ds, ds_1 ad essi rispettivamente corrispondenti possano entrambi con un cambiamento di variabili ricondursi alla forma di Liouville sì da divenire rispettivamente:

$$ds^2 = (f_1 - f_2)(dx_1^2 + dx_2^2)\,,\quad ds_1^2 = (\varphi_1 - \varphi_2)(d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2)\,,$$ ove $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$

designino quattro funzioni affatto arbitrarie rispettivamente della sola x_1, della sola x_2, della sola $\bar{x}_1$ e della sola $\bar{x}_2$, sono corrispondenti di II^a specie, quando si scelgano opportunamente le forze relative all'uno di essi. Di più le formole testè stabilite permettono di individuare senz'altro la trasformazione che da ds^2 fa passare a ds_1^2 ».

(Naturalmente una volta fissate le forze relative all'uno dei due sistemi, sono individuate (v. Levi Civita, Mem. cit.) anche quelle che devono competere all'altro).

2. Ripresi ora in esame i due sistemi (A') (A'$_1$) corrispondenti di II^a specie, passiamo a dare la dimostrazione del teorema del sig. Painlevè, relativamente ad essi. Perciò consideriamo un sistema (A'') che sia corrispondente di I^a specie di (A). La forma differenziale quadratica ds_2^2 che compete ad (A'') dovrà allora, in base al risultato del prof. Levi Civita (Mem. cit.), essere riducibile all'espressione:

$$ds_2^2 = \frac{f_1 - f_2}{f_1^2 f_2}\,dx_1^2 + \frac{f_1 - f_2}{f_2^2 f_1}\,dx_2^2\,.$$

Dicansi Y_1, Y_2 le forze relative ad (A''). Sarà allora (v. Levi Civita, Mem. cit., pag. 15):

$$Y_1 = X_1 f_2 = \frac{\partial Z}{\partial x_2}\,e^{2z}\,,\quad Y_2 = X_2 f_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_2}\,e^{2z}\,.$$

Vale a dire: le forze Y_1, Y_2 che competono ad (A'') ammettono un potenziale W che è $=\frac{1}{2}e^{2z}$, a meno d'una costante arbitraria k. Dalla (4)

$$W+k=\frac{1}{2}\frac{\psi_2 f_2-\psi_1 f_1}{(f_1-f_2)\,\psi_1\psi_2}$$

Quindi:

$$(W+k)\,ds_2^2=\frac{\psi_2 f_2-\psi_1 f_1}{2\psi_1\,\psi_2\,f_1^2\,f_2}\,dx_1^2+\frac{\psi_2 f_2-\psi_1 f_1}{2\psi_1\,\psi_2\,f_2^2\,f_1}\,dx_2^2\,.$$

Lo stesso mutamento di variabili che ridusse ds^2 alla forma di Liouville, riconduce $(W+k)\,ds^2{}_2$ alla forma:

$$(5)\qquad \frac{\psi_2 f_2-\psi_1 f_1}{2\psi_1^2\,\psi_2\,f_1^2\,f_2}\,dx_1^2+\frac{\psi_2 f_2-\psi_1 f_1}{2\psi_1\,\psi_2^2\,f_1\,f_2}\,dx_2^2\,.$$

Da ciò si vede come $(W+k)\,ds_2^2$, ds_1^2 siano suscettibili d'assumere quella forma che permette d'affermare che il sistema dinamico a cui compete la forma differenziale quadratica $(W+k)\,ds_2^2$ e la funzione potenziale $\frac{1}{W+k}$ è corrispondente di 1ª specie di (A').

Ora A, A'' sono corrispondenti di Iª specie, A'', A' sono corrispondenti di IIª specie: e così il teorema del sig. Painlevè resta dimostrato per tutti i casi.

3. Dal teorema stabilito nel n. 1 della presente Nota deduciamo facilmente come si possa, scegliendo opportunamente le forze X_1, X_2 relative ad (A), fare in modo che esso abbia fra i suoi corrispondenti di IIª specie, i quali rientrano nel tipo (A') sistemi riducibili a sistemi le cui traiettorie siano linee piane. Infatti posto (il che è lecito perchè ψ_1, ψ_2 sono affatto arbitrarie):

$$\psi_1=\frac{C_1}{f_2}\quad \psi_2=\frac{C_2}{f_2},\quad C_1\,.\,C_2$$

designando due costanti arbitrarie, diverrà la (5):

$$ds_1^2=K\left(\frac{dx_1^2}{f_2^2}+\frac{dx_2^2}{f_2^2}\right)$$

e questa forma differenziale si riduce con un ovvio mutamento di variabili a:

$$ds_1^2=K\,(d\bar{x}_1^2+d\bar{x}_2^2)\quad (K,\ \text{costante arbitraria}).$$

formola questa che esprime la proprietà di (A') d'essere riducibile ad avere per traiettorie linee piane. Allora sarà, in virtù delle formole stabilite:

$$X_1 = \frac{1}{2f_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{K_2 f_1 f_2}{K_1^1 f_2 - K_2^1 f_2} \quad X_2 = \frac{1}{2f_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{K_1 f_1 f_2}{K_1^1 f_2 - K_2^1 f_2}$$

(designando K_1, K_1^1, K_2^1 altrettante costanti arbitrarie) il che dimostra il nostro asserto.

Matematica. — *Complementi al teorema di Malus-Dupin.* Nota di T. Levi-Civita, presentata dal Socio Cerruti.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Correnti indotte in un trasformatore per l'interruzione della corrente primaria con l'apparecchio di Wehnelt.* Nota del dott. O. M. Corbino [1], presentata dal Socio Blaserna.

1. Proseguendo le ricerche i cui primi risultati furono comunicati all'Accademia il 17 dicembre ultimo, ho avuto occasione di osservare dei fatti che mi limito per ora a riferire sommariamente, non insistendo molto sulla loro interpretazione che si presenta ancora alquanto dubbia. La corrente, interrotta dall'apparecchio di Wehnelt, attraversa il primario del trasformatore già descritto, e gli estremi del secondario fanno capo ad un circuito che comprende un' autoinduzione variabile, un amperometro Carpentier per correnti continue, un micrometro a scintille sostituibile con filo metallico, e una batteria di lampade a incandescenza in derivazione.

Si osserva in principio, come si disse nella nota citata, un arco luminosissimo bluastro tra le palline del micrometro; il passaggio delle correnti in un senso solo, quello delle correnti di apertura, con la conseguente deviazione dell'amperometro; il numero d' interruzioni è lievemente inferiore a quello che si ha sostituendo al micrometro il corto filo, mentre l' intensità efficace nel secondario è maggiore.

L'arco bluastro si trasforma dopo un certo tempo in una successione di scintille istantanee di color roseo, dopo di che, in un tempo brevissimo, la pallina rilegata all'estremo del secondario negativo per le correnti di apertura si arroventa.

Su questa importante trasformazione ecco ciò che ho potuto osservare di nuovo.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo.