ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 21 ottobre 1900.

Matematica. — *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice.* Nota del Corrispondente CORRADO SEGRE.

Con questo scritto vorrei richiamare l'attenzione sopra alcuni numeri, che furono determinati, già da qualche tempo, dal sig. H. Schubert, ma che finora sembrano esser passati inosservati.

1. Nel 1890 il sig. Schubert ha intuito la seguente formola, che più tardi ha enunciata come certa (senza pubblicarne la dimostrazione) (1): « Se « si assoggettano due spazî S_q rispettivamente alle condizioni rappresentate, « coi simboli di Schubert, da $(a_0\, a_1 \ldots a_q)$, $(b_0\, b_1 \ldots b_q)$, ed inoltre alla con- « dizione che esista fra essi una correlazione, per la quale siano coniugate

(1) *Ueber eine Verallgemeinerung der Aufgaben der abzählenden Geometrie*, Mittheil. der math. Gesellsch. Hamburg, III, 1891; *Correlative Verwandtschaft in n Dimensionen*, Jahresber. der Deutsch. Math. Verein., IV, 1894-95.

Informato dal sig. Schubert che egli non intende ora pubblicare la sua dimostrazione, ho incaricato il mio allievo sig. G. Z. Giambelli di ritrovarla e di fare ulteriori ricerche in quel campo. Ciò diede occasione a questo giovane di spingermi, con una sua osservazione relativa al n. 3 di questo scritto, a dare ad esso l'estensione attuale.

« le tracce $[q-1]$ su essi risp. di $\sum a+\sum b+q$ coppie date d'iperpiani;
« il numero delle coppie di S_q, che così si ottengono, vale:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} (a_0+b_0)_{a_0} & (a_0+b_1)_{a_0} & \ldots & (a_0+b_q)_{a_0} \\ (a_1+b_0)_{a_1} & (a_1+b_1)_{a_1} & \ldots & (a_1+b_q)_{a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_q+b_0)_{a_q} & (a_q+b_1)_{a_q} & \ldots & (a_q+b_q)_{a_q} \end{vmatrix}$$

« dove (come sempre nel seguito) si scrive $(u)_v$ in luogo di $\dfrac{u!}{v!\,(u-v)!}$ ».

Ora si ponga in particolare

$$a_0=m-q\,,\,a_1=m-q+1\,,\ldots,\,a_q=m$$
$$b_0=n-q\,,\,b_1=n-q+1\,,\ldots,\,b_q=n\,.$$

Il determinante (1) si ridurrà al prodotto di alcune fattoriali per un altro noto determinante di coefficienti binomiali, il quale vale 1. Si otterrà dunque il seguente corollario della formola di Schubert:

Il numero delle coppie di $[q]$, giacenti rispettivamente entro due dati spazî S_m, S_n, e tali che tra i due $[q]$ di una coppia esista una correlazione nella quale sian coniugate le tracce $[q-1]$ di $(q+1)(m+n)-q^2$ coppie date d'iperpiani di S_m, S_n, è

$$(2)\qquad \frac{[1!\,2!\ldots q!]\,.\,[(m+n-2q)!\,(m+n-2q+1)!\ldots(m+n-q)!]}{[(m-q)!\,(m-q+1)!\ldots m!]\,.\,[(n-q)!\,(n-q+1)!\ldots n!]}$$

ossia, posto $n-q=h$,

$$(2)\qquad \frac{(m+n-2q)_h\,(m+n-2q+1)_h\ldots(m+n-q)_h}{(h)_h\,(h+1)_h\ldots(n)_h}\ \text{(1)}$$

2. Traduciamo analiticamente questa proposizione, cominciando dal caso $m=n$, nel quale la formola precedente diventa:

$$(3)\qquad \frac{(2h)_h\,(2h+1)_h\ldots(n+h)_h}{(h)_h\,(h+1)_h\ldots(n)_h}\,.$$

A tal fine ricordiamo (2) che una correlazione tra due $[q]$ di due spazî S, S' di dimensione n può riguardarsi come reciprocità degenere di specie

(1) Non occorre avvertire che, facendo nell'uno dei due spazi S_m, S_n, od in entrambi, i cambiamenti di parole indicati dalla legge di dualità, si possono interpretare quei numeri in altri modi, cioè come relativi a forme collineari, od a forme (duali degli S_q) reciproche.

(2) V. qui e nel seguito il § I della mia Memoria: *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie*, Mem. R. Acc. Lincei (3) 19, 1884. Esso si trova riprodotto nel § 17 dell'utile libro del sig. P. Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig, Teubner 1899

$h = n - q$ fra S, S': essendo coniugati in questa reciprocità due iperpiani che seghino i due $[q]$ (*singolari*) secondo due $[q-1]$ coniugati nella prima correlazione. Rappresentiamo la reciprocità tra S, S' con un' equazione bilineare:

$$\sum a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k = 0\,,$$

quella che lega due iperpiani ξ, η quando sono coniugati. Dire che la reciprocità è degenere di specie h equivale a dire che il determinante $|a_{ik}|$ ha nulli tutti i minori d'ordine $n-h+2$. Dando poi delle coppie d'iperpiani coniugati si vengono a dare altrettante equazioni lineari fra le a_{ik}. Potremo dunque enunciare il risultato precedente così:

Le reciprocità degeneri di specie h fra due S_n costituiscono una varietà di dimensione n^2+2n-h^2 e d'ordine (3). Od anche:

Uguagliando a zero tutti i determinanti di un dato ordine $n-h+2$ estratti da una matrice quadrata $|a_{ik}|$ $(i, k = 0, 1 \ldots n)$, si viene a porre, fra gli elementi a_{ik} di questa matrice, un sistema di equazioni (equivalente ad h^2 equazioni indipendenti) il cui ordine è dato dalla formola (3).

Assumendo le a_{ik} come coordinate omogenee di punti in uno spazio $[n^2+2n]$, abbiamo così ottenuto in questo spazio una serie di n varietà $V^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots n)$ di dimensione n^2+2n-h^2 e d'ordine (3); le quali, se i punti stessi si prendono come imagini delle reciprocità $\sum a_{ik}\, \xi_i\, \eta_k$ tra S, S', rappresenteranno le reciprocità degeneri di specie h. Ciascuna di esse contiene le varietà seguenti. In particolare la $V^{(1)}$, d'ordine $n+1$, è definita dall' equazione

$$|a_{ik}| = 0\,;$$

essa dà $V^{(2)}, V^{(3)}, \ldots V^{(n)}$ come luoghi risp. dei suoi punti doppî, tripli, ... n-pli. La $V^{(n)}$, di dimensione $2n$ e d'ordine $(2n)_n$, è l'imagine del sistema delle forme bilineari *riducibili* (prodotti di una forma delle ξ per una forma delle η), cioè si rappresenta parametricamente per mezzo delle formole (coi parametri indipendenti x, y)

$$a_{ik} = x_i\, y_k\,.$$

Già nel 1891 io avevo considerato [1] queste due varietà e la rappresentazione delle reciprocità tra due S_n coi punti di $[n^2+2n]$: rappresentazione che ottenevo anche geometricamente ricorrendo alle due schiere ∞^n di S_n giacenti nella $V^{(n)}$ [2]. Più recentemente il sig. S. Kantor [3] ha in-

[1] *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi.* Rend. Circ. mat. Palermo, vol. 5; *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici.* Math. Annalen, t. 40.

[2] Per $n = 1$ è la rappresentazione delle omografie binarie coi punti dello spazio ordinario, trattata da C. Stéphanos, Math. Annalen, t. 22, 1883.

[3] *Theorie der Aequivalenz von linearen ∞^λ — Schaaren bilinearer Formen.* Sitzungsberichte d. k. bay. Akad. München, t. 27, 1897; *Theorie der Elementartheiler höherer Stufen.* Monatshefte f. Math. u. Ph. t. 11, 1900.

trodotto tutte le n varietà $V^{(h)}$ (pur mettendo da parte la questione del loro ordine) per trattare il problema dell' *equivalenza* (nel senso di Weierstrass) di due sistemi, comunque infiniti, di forme bilineari ([1]). Come il sig. Kantor osserva, la $V^{(n)}$ dà il modo di costruire semplicemente le altre varietà: infatti, poichè una reciprocità degenere di specie h è data da una forma bilineare che si può rappresentare come somma di $n-h+1$ forme riducibili ([2]), così $V^{(h)}$ si può definire come il luogo degli spazî che congiungono $n-h+1$ punti variabili di $V^{(n)}$. Cioè $V^{(n-1)}$ è il luogo delle *corde* di $V^{(n)}$, $V^{(n-2)}$ il luogo dei *piani trisecanti*, ecc.

3. La formola (2), più generale della (3), si può, come questa, interpretare algebricamente, in relazione con una matrice rettangolare

$$|a_{ik}| \qquad (i=0,1,\ldots m; k=0,1,\ldots n).$$

Consideriamo un'equazione bilineare

$$\sum a_{ik}\,\xi_i\,\eta_k = 0$$

tra iperpiani ξ, η (che diremo *coniugati*) di S_m, S_n. Essa dà luogo ad una teoria perfettamente uguale a quella che per $m=n$ è svolta nel citato § 1 della mia Memoria sulle omografie. Possono anzitutto esservi degl' iperpiani ξ di S_m *singolari* in quanto son coniugati a *tutti* gl' iperpiani di S_n: son quelli che verificano le $n+1$ equazioni

$$\sum_i a_{ik}\,\xi_i = 0.$$

Similmente si hanno in S_n gl' iperpiani *singolari* η, pei quali

$$\sum_k a_{ik}\,\eta_k = 0.$$

Se rappresentiamo con $q+1$ il *rango* (secondo Frobenius) della matrice delle a (se cioè son nulli tutti i suoi determinanti d'ordine $q+2$ e non tutti quelli d'ordine $q+1$), gl' iperpiani singolari di S_m saranno quelli che passano per uno spazio $[q]$ ben determinato; e lo stesso accadrà in S_n. Fra questi due $[q]$ *singolari* esisterà una correlazione non degenere: così che due iperpiani ξ, η di S_m, S_n saranno coniugati per la data equazione bilineare, solo quando passano per due $[q-1]$ coniugati della detta correlazione ([3]).

([1]) Al sig. Kantor pare sia sfuggito lo studio che io già avevo fatto della $V^{(n)}$.

([2]) Proposizione ben nota: cfr. ad es. il n. 5 della mia Memoria citata sulle omografie.

([3]) Qui, come in altri casi, appare utile considerare reciprocità o collineazioni degeneri (definite con equazioni bilineari, cioè come *connessi*), anche tra spazî di diverse dimensioni.

Ora, se vogliamo l'ordine del sistema di equazioni che si hanno annullando tutti i determinanti d'ordine $q+2$ estratti dalla matrice delle a_{ik}, basterà (come al n. 2) che cerchiamo il numero delle soluzioni, quando si aggiungano $(q+1)(m+n)-q^2$ equazioni lineari fra quelle indeterminate, del tipo $\sum a_{ik}\xi_i\eta_k=0$, ove le ξ e η sian date. Dunque, per quanto abbiamo detto prima, si tratterà di vedere quante sono le coppie di $[q]$, giacenti risp. in S_m e S_n, tali che tra i due $[q]$ di una coppia esista una correlazione per cui siano coniugate le tracce $[q-1]$ di quelle coppie d' iperpiani dati ξ, η. E in base al n. 1 concludiamo che la (2) ci darà quell'ordine; cioè:

Scrivendo che una matrice di $m+1$ *colonne ed* $n+1$ *linee è del rango* $q+1$, *si viene a porre fra i suoi elementi un sistema di equazioni [equivalente a* $(m-q)(n-q)$ *equazioni indipendenti] il cui ordine è espresso dalla formola* (2).

Anche qui, se le a_{ik} si assumono come coordinate di punti in uno $[mn+m+n]$, si ottiene in questo spazio, se è ad es. $m\geq n$, una serie di n varietà $V^{(h)}$ $(h=1,\dots n)$, in tutto analoghe a quelle del n° precedente, ma più generali. La $V^{(n)}$, che si ha annullando i determinanti di secondo ordine, cioè scrivendo che la forma lineare $\sum a_{ik}\xi_i\eta_k$ è riducibile, è una varietà di dimensione $m+n$ e d'ordine $(m+n)_m$, rappresentata parametricamente colle formole $a_{ik}=x_i y_k$, e già studiata da me nella citata Nota di Palermo. Le altre varietà si deducono da essa risp. come luoghi: delle sue corde, dei suoi piani trisecanti, ..., dei suoi S_q $(q+1)$-secanti [1].

4. Invece di una matrice quadrata con elementi completamente indeterminati, come s'è considerata al n. 2, si può prendere una matrice quadrata *simmetrica*, e fare per essa le ricerche analoghe alle precedenti.

Perciò ricorriamo ad un' altra formola del sig. Schubert, enunciata nel 1891 [2], e più tardi dimostrata come corollario di una più generale nell'importante Memoria relativa ai numeri delle quadriche di varie dimensioni soddisfacenti a date condizioni fondamentali [3]: « Il numero delle quadriche « di dimensione $q-1$ giacenti in S_n e tangenti a $n(q+1)-\frac{q(q-1)}{2}$ « iperpiani è espresso da

$$(4)\quad\begin{cases}(q\ pari) & \dfrac{2^{n-q}[1!3!\dots(q-1)!].[(2n-2q+2)!(2n-2q+4)!\dots(2n-q)!]}{(n-q+1)!(n-q+2)!\dots(n-1)!\,n!}\\[2ex] (q\ impari) & \dfrac{[0!\,2!\dots(q-1)!].[(2n-2q+1)!(2n-2q+3)!\dots(2n-q)!]}{(n-q)!(n-q+1)!\dots(n-1)!\,n!}\end{cases}$$

(1) In fatti, se la matrice delle a_{ik} ha il rango $q+1$, la forma bilineare corrispondente si può rappresentare come somma di $q+1$ forme riducibili: ciò si vede ancora, come nel caso del n. 2, assumendo i due $[q]$ singolari come spazî fondamentali per le coordinate di S_m, S_n.

(2) *Mitteil. aus d. abzählenden Geom.*, Jahresb. der Deutsch. Math. Verein. I, 1890-91.

(3) *Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in n Dimensionen.* Math. Annalen, t. 45, 1894.

Ponendo $q = n - h$, possiamo anche dare a queste espressioni la seguente forma:

$$(4)\ \begin{cases} (n-h\ pari) & 2^h \dfrac{(2h+2)_h\,(2h+4)_h \ldots (n+h)_h}{(h+1)_h\,(h+3)_h \ldots (n-1)_h}, \\ (n-h\ impari) & \dfrac{(2h+1)_h\,(2h+3)_h \ldots (n+h)_h}{(h)_h\,(h+2)_h \ldots (n-1)_h}, \end{cases}$$

oppure quest' altra:

$$(4)\ \begin{cases} (h\ impari) & \dfrac{(n+1)_h\,(n+3)_h \ldots (n+h)_h}{(h)_h\,(h+2)_h \ldots (2h-1)_h}, \\ (h\ pari) & \dfrac{(n+2)_{h+1}\,(n+4)_{h+1} \ldots (n+h)_{h+1}}{(h+1)_{h+1}\,(h+3)_{h+1} \ldots (2h-1)_{h+1}}. \end{cases}$$

Ora abbiasi una matrice quadrata simmetrica, d'ordine $n+1$,

$$|\, a_{ik}\, |\,, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

e consideriamo l'equazione quadratica, in coordinate d' iperpiani,

$$\sum a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 0\,.$$

Essa definisce come inviluppo una quadrica; la quale, se quella matrice è di rango $q+1$, degenera in una M^2_{q-1} (*nucleo* dell' inviluppo), alla quale son tangenti gl' iperpiani che verificano quell'equazione. Ne segue che la proposizione precedente potrà enunciarsi così:

Scrivendo che un determinante simmetrico d'ordine $n+1$ ha il rango $n-h+1$ si pone fra i suoi elementi un sistema di equazioni [equivalenti a $\dfrac{h(h+1)}{2}$ indipendenti] il cui ordine è espresso dalle formole (4).

Nello spazio di dimensione $\dfrac{n(n+3)}{2}$ in cui le a_{ik} son le coordinate di punti — spazio rappresentativo delle quadriche di S_n — possiamo considerare n varietà $W^{(1)}, \ldots, W^{(n)}$ analoghe alle V del n. 2. La $W^{(h)}$ sia quella che rende il determinante del rango $n-h+1$, cioè che rappresenta le quadriche degeneri di specie h. Essa ha la dimensione $\dfrac{n(n+3)}{2} - \dfrac{h(h+1)}{2}$ e l'ordine dato dalle formole (4). Siccome però queste suppongono $h < n$ (cioè $q > 0$), bisogna aggiungere che la $W^{(n)}$, di dimensione n, ha l'ordine 2^n: essa in fatti ha la rappresentazione parametrica

$$a_{ik} = x_i\, x_k\,,$$

(ossia è rappresentata in S_n dal sistema lineare di tutte le quadriche-luoghi M^2_{n-1}); i suoi punti son le imagini delle quadriche degenerate, come inviluppi, in punti doppî. Mediante $W^{(n)}$ si costruiscono le altre varietà: la $W^{(h)}$ è il luogo degli spazî $[n-h]$ che congiungono $n-h+1$ punti variabili di $W^{(n)}$ (cfr. la fine del n. 2 o 3). D'altra parte le stesse varietà si possono evidentemente definire partendo dalla $W^{(1)}$, cioè dalla forma — discriminante

$$| a_{ik} | = 0 ,$$

come luoghi risp. dei suoi punti doppî ($W^{(2)}$), tripli ($W^{(3)}$), ..., n-pli ($W^{(n)}$). Per $n = 2$ si ritrovano in S_5 la superficie F^4 e la varietà M_4^3 studiate dal sig. Veronese e da me.

5. Le precedenti determinazioni di ordini possono applicarsi a varietà rappresentate in modo analogo a quelle di cui si è trattato, ma colla differenza che le a_{ik}, invece di essere variabili indipendenti, sian legate fra loro in dato modo. Si può dire che in tali casi si hanno da *segare* le varietà V o W dei n[i] precedenti con varietà definite dai dati legami tra le a.

Così si supponga nel n. 3 che le a_{ik} sian date forme lineari di $d + 1$ variabili indipendenti $x_0\, x_1 \dots x_d$. Allora, annullando i determinanti d'ordine $n + 1$ estratti dalla matrice $|a_{ik}|$ di $m + 1$ colonne e $n + 1$ linee, ove $m \geqq n$, abbiamo nello S_d dei punti x una varietà di dimensione $d - m + n - 1$ (supposta $\geqq 0$) e d'ordine $(m + 1)_n$. È il tipo generale delle *varietà generate con forme fondamentali proiettive*, studiate dal Veronese (Math. Annalen, 19), e ricomparse anche ultimamente in vari casi particolari nelle ricerche del sig. Reye sopra i sistemi lineari di forme fondamentali (di piani o sfere) proiettive. Ma adesso, oltre a quell'ordine $(m + 1)_n$, che è ben noto ([1]), possiamo assegnare gli ordini delle varietà doppia, tripla,... che si hanno uguagliando a zero tutti i determinanti risp. d'ordine $n, n - 1, \dots$ estratti dalla matrice. La varietà h-pla esisterà se il numero $d - h(m - n + h)$ è $\geqq 0$, ed avrà per dimensione appunto questo numero; mentre il suo ordine, per quanto s'è visto al n. 3, sarà espresso dalla formola (2).

Più in generale possiamo sostituire alle a_{ik} delle forme d'un ordine qualunque μ delle $x_0\, x_1 \dots x_d$. Allora la varietà che si ottiene scrivendo che la matrice $|a_{ik}|$ è di rango $n - h + 1$ avrà ancora la dimensione $d - h(m - n + h)$; ma il suo ordine sarà dato dall'espressione (2) moltiplicata per $\mu^{h(m-n+h)}$. In fatti si seghi la varietà con uno spazio di dimensione $h(m - n + h)$; vale a dire al posto delle x si mettano delle forme lineari di $h(m - n + h) + 1$ nuove variabili y: con che gli elementi a_{ik} della matrice diventeranno forme d'ordine μ di queste y. I punti, in numero finito, che così si avranno in S_d, corrisponderanno a quei punti dello spazio $[mn + m + n]$ considerato al n. 3, che sono intersezioni della $V^{(h)}$

([1]) È caso particolare di una formola data, per induzione, da G. Salmon nella 2[a] ed. (1866) della sua *Higher Algebra*, e poi dimostrata da S. Roberts, Journ. f. Math. 67 (1867). Vedi anche le più recenti dimostrazioni di K. Th. Vahlen (Journ. f. Math. 113, 1894), e M. Pieri (Rendic. Circ. mat. Palermo, t. 11, 1896).

di là e della varietà di dimensione $h(m-n+h)$ rappresentata parametricamente col porre le coordinate a_{ik} uguali alle dette forme d'ordine μ delle y. Ora quest' ultima varietà è d'ordine $\mu^{h(m-n+h)}$, mentre $V^{(h)}$ è d'ordine (2). Dunque è vero che il prodotto di (2) per quella potenza di μ dà il numero cercato.

Se la matrice $|a_{ik}|$ è quadrata, d'ordine $n+1$, e ancora le a_{ik} son forme d'ordine μ delle coordinate di punti $x_0\, x_1 \ldots x_d$, si dovrà moltiplicare l'espressione (3) per μ^{h^2} affine di avere l'ordine della varietà h-pla, di dimensione $d-h^2$ (supposta ≥ 0), per la forma d'ordine $(n+1)\,\mu$ definita dall'equazione

$$|a_{ik}| = 0.$$

Ove poi le date forme a_{ik} sian tali che $a_{ik} = a_{ki}$, cioè si tratti di una matrice quadrata simmetrica, la forma d'ordine $(n+1)\,\mu$ rappresentata da quell' equazione avrà una varietà h-pla (che annulla i determinanti d'ordine $n-h+2$) di dimensione maggiore che nel caso generale, cioè $d-\dfrac{h(h+1)}{2}$, supposto che questo numero sia ≥ 0. Quanto all'ordine della detta varietà, si vede con ragionamento del tutto analogo a prima che sarà espresso dalla formola (4) moltiplicata per $\mu^{\frac{h(h+1)}{2}}$ [1].

Si può far applicazione di ciò alle *varietà Hessiane successive* di una forma $f(x_0\, x_1 \ldots x_n)$ d'ordine ν di S_n. Chiamiamo così l'ordinaria forma Hessiana $H^{(1)}$, determinante simmetrico d'ordine $n+1$, i cui elementi sono $a_{ik} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}$; e poi anche le varietà $H^{(2)}, H^{(3)}, \ldots$, i cui punti annullano tutti i minori d'ordine n, $n-1$, ... di quel determinante. La $H^{(h)}$, che riduce il determinante al rango $n-h+1$, esiste se $n-\dfrac{h(h+1)}{2}$ è ≥ 0, ed in tale ipotesi ha questo numero come dimensione, e per ordine l'espressione (4) moltiplicata per $(\nu-2)^{\frac{h(h+1)}{2}}$. Essa è varietà h-pla per la forma $H^{(1)}$; ed è il luogo dei punti le cui quadriche polari rispetto ad f sono coni di specie h [2].

[1] In particolare per $h=2$, $d=3$, si ha che nello spazio ordinario la superficie rappresentata dal determinante simmetrico ha $\mu^3 . (n+2)_3$ punti doppî. Ciò rientra in una proposizione di G. Salmon, *Anal. Geom. of three Dimensions*, 2d ed. 1865. Cfr. anche Cremona, *Preliminari di una teoria geom. d. superficie*, n. 131 (n. 157 dell'ed. tedesca).

[2] E. Ascione, *Sulla Hessiana di una varietà in* S_4, Giorn. di mat. 31 (1893) ha fatto cenno della serie di varietà H; dimostrando che in S_4 la curva $H^{(3)}$ è di ordine $20(\nu-2)^3$ (cfr. la formola di Salmon citata dianzi, nella quale si ponga $n=4$).