ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 novembre 1900.

A. Messedaglia, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sul moto di un pendolo verticale, il punto di sospensione del quale è soggetto a movimenti oscillatorî e sulla determinazione di questi movimenti.* Nota del dott. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

In questa Nota, e in successive ricerche, io mi propongo di studiare con metodo rigoroso un problema che è fondamentale in geodinamica: la determinazione dei dati caratteristici che definiscono le ondulazioni sismiche, per mezzo del moto apparente di un pendolo verticale.

I moti sismici, qualunque sia l'origine e la natura loro, si rendono manifesti in un punto A della superficie terrestre coll'obbligare esso punto a compiere delle oscillazioni intorno alla sua posizione d'equilibrio. Se A è il punto di sospensione di un pendolo, e immaginiamo un osservatore in A ed in moto con A, questo osservatore vedrà muovere il pendolo, e potrà ottenere, con opportuni congegni e con mezzi convenienti, delle immagini svariate di tal movimento; onde risulta che il moto del pendolo rispetto all'osservatore si può *graficamente* determinare. Supponendo conosciuto in tal guisa questo moto apparente, si tratta di risalire alla conoscenza del movimente vero di A. Io faccio qui alcune ipotesi su tal movimento, le quali, benchè molto restrittive, presentano il vantaggio di condurre a risultati facili ed espliciti, e di porre in luce le vere difficoltà del problema più generale.

Sia O la posizione d'equilibrio di A, Oy la verticale per O positiva dall'alto vesso il basso, Ox la direzione nella quale comincia a muoversi il punto A, e che supporrò orizzontale. Ammetterò inoltre che al tempo $t = 0$ il punto A si scosti dalla posizione O per un impulso qualunque, e seguiti ad oscillare intorno ad essa e sulla retta Ox con un moto rappresentato dall'equazione:

$$\xi = a \operatorname{sen} \frac{\pi}{2T} t ,$$

ove a e T sono due costanti, la prima delle quali rappresenta la semi-ampiezza di una oscillazione, e la seconda la durata di essa.

Se x e y sono le coordinate della massa m del pendolo semplice alla fine del tempo t, e l la sua lunghezza, le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \dfrac{\xi - x}{l} \\ m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = mg - \lambda \dfrac{y}{l} , \end{cases}$$

ove λ è un moltiplicatore indeterminato.

Introducendo l'angolo α che alla fine del tempo t la direzione Am del pendolo fa con la verticale per A, si ha:

$$(1) \qquad \xi - x = l \operatorname{sen} \alpha \qquad y = l \cos x ;$$

talchè le equazioni precedenti diventano:

$$\xi'' + l \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - l \cos \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\lambda}{m} \operatorname{sen} \alpha$$

$$- l \cos \alpha \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 - l \operatorname{sen} \alpha \frac{d^2\alpha}{dt^2} = g - \frac{\lambda}{m} \cos \alpha ;$$

dalle quali, eliminando λ, si ottiene:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{\xi''}{l} \cos \alpha - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \alpha .$$

Ma se si suppone α assai piccolo, come realmente avviene, sarà lecito sostituire a quella equazione la seguente:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha + \frac{a\pi^2}{4lT_2} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2T} = 0 ,$$

ossia

$$(2) \qquad \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + h^2 \alpha + bp^2 \operatorname{sen} pt = 0 ,$$

avendo posto per brevità $\frac{g}{l} = h^2$, $\frac{a}{l} = b$, $\frac{\pi}{2T} = p$.

Suppongo p diverso da h; il caso di $p = h$ sarà considerato più innanzi. Allora l'integrale generale dell'equazione (2) è dato da

$$\alpha = \mathrm{A} \operatorname{sen} ht + \mathrm{B} \cos ht + \frac{bp^2}{p^2 - h^2} \operatorname{sen} pt ,$$

ove A e B sono due costanti arbitrarie.

Ma per $t = 0$ deve essere, secondo le ipotesi fatte, $\alpha = 0$ e $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = \frac{1}{l}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0 = bp$; quindi si dovrà prendere:

$$\mathrm{B} = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{A} = -\frac{bph}{p^2 - h^2} .$$

Per conseguenza l'equazione che definisce il moto del pendolo è

$$\alpha = \frac{bp}{p^2 - h^2} \{ p \operatorname{sen} pt - h \operatorname{sen} ht \} ;$$

la quale però va unita alle (1), che nel caso presente diventano:

$$\xi - x = l\alpha \qquad y = l .$$

Poichè, stando nell'approssimazione considerata, y è costante, si può immaginare che la massa m lasci traccia del suo moto sopra una striscia di carta animata di un moto uniforme sopra un piano orizzontale distante l da o, e nella direzione normale ad ox. Sia Bt' la retta che sarebbe tracciata da m, quando non esistesse alcun moto, e B il punto di essa corrispondente a a l'istante $t = 0$. Siccome il piano orizzontale menzionato si muove con A, la retta Bt' si mantiene costantemente in un piano verticale con A, ed alla fine del tempo t la massa m disterà da Bt' di una quantità $z = \alpha l$; talchè le coordinate di m rispetto agli assi ortogonali Bt' e Bz, saranno $z = \alpha l$, $t' = vt$, essendo v la velocità costante della striscia di carta. Di qui risulta che l'equazione della curva tracciata da m è

$$(3) \qquad z = \frac{ap}{p^2 - h^2}\left(p \operatorname{sen} \frac{p}{v} t' - h \operatorname{sen} \frac{h}{v} t'\right),$$

e sarà chiamata « Curva (S) ».

Per vedere l'andamento di un primo tratto di questa curva, considero il caso di $p > h$. Allora è $2\mathrm{T} < \frac{\pi}{h} < \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, cioè la durata delle singole oscillazioni di A è minore di quella delle oscillazioni isocrone del pendolo. Quanto t' è assai piccolo, si ha con sufficiente approssimazione:

$$(4) \qquad z = \frac{apt'}{v} ,$$

quindi z è positiva. Inoltre per $\frac{t'}{v} < T < \frac{\pi}{2h}$, risulta $p \operatorname{sen} \frac{p}{v} t' > h \operatorname{sen} \frac{h}{v} t'$, e perciò z è ancora positiva. *Però z non diventa un massimo per $\frac{t'}{v} = T$, ma un poco prima.* Infatti, essendo

$$(5) \qquad z' = \frac{ap}{p^2 - h^2} \left(\frac{p^2}{v} \cos \frac{p}{v} t' - \frac{h^2}{v} \cos \frac{h}{v} t' \right),$$

si vede che mentre per $\frac{t'}{v}$ piccolissimo z' è positiva, per $\frac{t'}{v} = T$ risulta negativa; per conseguenza z' si annulla per $\frac{t'}{v} < T$. Quando $\frac{t'}{v}$ oltrepassa il valore T, $\operatorname{sen} h \frac{t'}{v}$ seguita ad esser positiva, mentre $\operatorname{sen} \frac{pt'}{v}$ diminuisce; giunge perciò un momento in cui z s'annulla. Tal valore di $\frac{t'}{v}$ è minore di 2T, giacchè per $\frac{t'}{v} = 2T$ la z risulta negativa, e sarà indicato con t'_0. Questo punto, in cui la curva taglia l'asse delle t', è un punto di flesso? Considerando la derivata seconda

$$(6) \qquad z'' = \frac{ap}{v^2(p^2 - h^2)} \left(-p^3 \operatorname{sen} \frac{pt'}{v} + h^3 \operatorname{sen} \frac{ht'}{v} \right),$$

si vede che per $\frac{t'}{v} = T$ è negativa, e tale si conserva fino a $\frac{t'}{v} = t'_0$ compreso, mentre per $\frac{t'}{v} = 2T$ diventa positiva; quindi il punto di flesso giace nel tratto di curva da $\frac{t'}{v} = t_0$ a $\frac{t'}{v} = 2T$.

Queste considerazioni sono sufficienti per porre in luce le differenze fra l'andamento della curva (S) e quello della curva immagine del vero moto di A. Dalle equazioni (3), (5) e (6) si traggono poi le seguenti osservazioni utili in geodinamica:

1°. Nel vuoto la curva (S) è indipendente dalla massa del pendolo. Nell'aria invece essa dipende da m; ma se si vuol trascurare la resistenza dell'aria, bisognerà che il peso che costituisce il pendolo abbia grande massa e piccolo volume.

2°. Che per un medesimo valore di T, i punti d'incontro della curva con l'asse delle t' sono indipendenti dall'ampiezza a delle oscillazioni; ed è anche indipendente da a la distribuzione dei massimi e minimi, e dei punti di flesso.

3°. Che la coordinata z dei massimi e minimi dipende bensì da a, ma anche da T.

Adesso, supponendo ottenuta graficamente la curva (S) nel modo anzidetto, si tratta di dedurre il valore delle costanti a e T che definiscono il moto oscillatorio di A.

Perciò è importante il teorema seguente:

La conoscenza delle coordinate z e t' di un punto di flesso della curva (S) *è sufficiente per determinare rigorosamente il prodotto della semi-ampiezza delle oscillazioni di* A *per la loro durata.* Infatti se τ' e γ sono le coordinate t' e z di un punto di flesso, si ha:

$$\gamma = \frac{ap}{p^2 - h^2}\left(p \operatorname{sen}\frac{p\tau'}{v} - h \operatorname{sen}\frac{h\tau'}{v}\right)$$

$$o = -p^3 \operatorname{sen}\frac{p\tau'}{v} + h^3 \operatorname{sen}\frac{h\tau'}{v};$$

dalle quali eliminando $p \operatorname{sen}\frac{p\tau'}{v}$, si trova

$$\gamma = \frac{-ah}{p} \operatorname{sen}\frac{h\tau'}{v},$$

ossia

$$aT = -\frac{\pi\gamma}{2h \operatorname{sen}\frac{h\tau'}{v}}, \tag{7}$$

che dimostra il teorema enunciato. Questa formula è anche notevole per la pratica, perchè si presta all'uso dei logaritmi.

I singoli valori di a e T si possono determinare con molta approssimazione, osservando che, se t'' è un valore assai piccolo di t' e ζ il corrispondente valore di z, si ha per la (4)

$$\zeta = \frac{apt''}{v},$$

da cui

$$\frac{a}{T} = \frac{v\zeta}{t''} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Questa formula, unita alla (7), permette di determinare a e T.

Si può quindi concludere: *Quando il moto di* A *si può rappresentare con una equazione della forma* $\xi = a \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2T}$ *con* a *e* T *costanti, e avviene nel modo anzidetto, la conoscenza dei primissimi punti della curva* (S) *e*

del primo punto di flesso è sufficiente per calcolare con molta approssimazione l'ampiezza e la durata delle oscillazioni di A.

Questo teorema è stato dedotto nell'ipotesi di p diverso da h; ma io l'ho enunciato sotto forma generale, perchè esso è valido anche nel caso di $p = h$, cioè $T = \frac{\pi}{2h}$. Infatti in questo caso l'equazione (2) diventa

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + h^2\alpha + bh^2 \operatorname{sen} ht = 0\,,$$

il cui integrale generale è

$$\alpha = A \operatorname{sen} ht + B \cos ht + \frac{hb}{2}\, t \cos ht\,.$$

Per $t = 0$ deve essere $\alpha = 0$, $\frac{d\alpha}{dt} = bh$; quindi $B = 0$ e $A = \frac{b}{2}$; per conseguenza in questo caso l'equazione della curva (S) è

$$z = \frac{a}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{ht'}{v} + \frac{ht'}{v}\cos\frac{ht'}{v}\right).$$

Ora per t' piccolissimo si ottiene

$$z = a\frac{ht'}{v}\,;$$

la quale si deduce dalla (4) ponendo $p = h$. Inoltre, denotando con γ e τ' le coordinate di un punto di flesso, si ha:

$$\gamma = \frac{a}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{h\tau'}{v} + \frac{h\tau'}{v}\cos\frac{h\tau'}{v}\right)$$

$$0 = 3 \operatorname{sen}\frac{ht'}{v} + \frac{ht'}{v}\cos\frac{ht'}{v}\,,$$

dalle quali, eliminando $\frac{h\tau'}{v}\cos\frac{h\tau'}{v}$, si trae:

$$a = -\frac{\gamma}{\operatorname{sen}\frac{h\tau'}{v}}\,.$$

Questa formula si deduce dalla (7) ponendo $T = \frac{\pi}{2h}$, dunque l'asserto è dimostrato.

Si osservi infine che posto $h = 0$ la (3) diventa

$$z = a \operatorname{sen} \frac{pt'}{v},$$

e quindi la curva (S) rappresenterebbe il vero moto di A. Ora considerare nulla la costante h è come supporre che la massa del pendolo resti costantemente nella sua posizione iniziale; e benchè questo non sia rigorosamente vero, potrà essere ammesso con sufficiente approssimazione quando h sia una quantità molto piccola, cioè l notevolmente superiore a dieci metri. Ma nella pratica non è conveniente l'uso di pendoli così lunghi, anche per la ragione che l'elasticità degli alti fabbricati è una nuova causa di perturbazione. Resta quindi qualche dubbio sulla validità dei risultati che si ottengono coi metodi e coi sismografi attualmente in uso.

Cristallografia. — *Sulla legge della razionalità degli indici nei cristalli.* Nota di C. Viola, presentata dal Vicepresidente Blaserna.

Esaminiamo dapprima le conseguenze, alle quali si viene con la legge della razionalità degli indici, e così ci sarà dato di vedere che cosa è questa legge per la cristallografia.

Consideriamo le simmetrie dei cristalli tanto dal punto di vista geometrico, quanto dal punto di vista fisico, e incominciamo dalla legge della razionalità, ossia supponiamo dapprima con Gadolin che l'equivalenza delle singole direzioni sia determinata unicamente dalla simmetria geometrica, avendo luogo la razionalità degli indici, senza alcun riguardo pel momento dei fenomeni fisici. Il nostro punto di partenza sia p. e. un asse di simmetria 4-rio. Nella figura annessa esso è immaginato in posizione verticale, perpendicolare al piano del disegno, e rappresentato dal punto c; e siano n_1, n_2, n_3, n_4 i poli di quattro faccie razionali date e simmetriche per rispetto all'asse quaternario. E inoltre siano xx' e yy' due spigoli qualunque, razionali, fra loro perpendicolari, e normali all'asse 4-rio. Per meglio fissare le idee possiamo p. e. assumere l'asse 4-rio per asse delle z, e gli spigoli xx' e yy' per assi delle x e delle y.

Dunque x e y sono spigoli qualunque, razionali e perpendicolari all'asse 4-rio; e come elemento di simmetria è dato l'asse quaternario.

Se il simbolo della faccia in n_2 è (hkl), saranno quelli delle altre tre faccie razionali, come segue:

$(k\bar{h}l)$ della faccia in n_1,
$(\bar{k}hl)$ " " " n_3,
$(\bar{h}\bar{k}l)$ " " " n_4.