ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute alla Presidenza prima del 2 dicembre 1900 (1).

Astronomia. — *Sulle stelle filanti del Novembre 1900.* Nota del Socio P. TACCHINI.

Fino dal 1898 nel render conto all'Accademia delle osservazioni sulle Leonidi, io concludeva che vi era molto da dubitare per il ritorno di una grande pioggia di meteore nel 1899 paragonabile a quella del 1866. Nel Novembre, infatti, del 1899 mancò la grande pioggia di stelle e ben ristretto fu il numero delle meteore osservate.

Ora informo l'Accademia, che anche nel passato Novembre io non mancai di osservare nella notte dal 13 al 14 e dal 14 al 15 con cielo assai puro specialmente nella prima notte dalle 3^h alle 5^h, e si può dire che il fenomeno mancò intieramente. Anche gli altri osservatori ottennero risultato negativo, cosicchè è da ritenersi che la nube meteorica siasi disciolta, o che sia spostata in modo da non essere stato più possibile il passaggio della terra attraverso alla parte più densa di detta nube, come avvenne nel 1866, 1833 e 1799.

Matematica. — *Le coincidenze di una serie algebrica $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di spazî a k dimensioni, immersi nello spazio ad r dimensioni.* Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Corrispondente C. SEGRE.

Indicheremo, come spesso si usa, con $[k]$ uno spazio lineare di punti a k dimensioni, con $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ la *forma fondamentale* costituita dai $[k]$ che hanno con un dato $[a_0]$ un punto a comune, con un dato $[a_1]$ una retta, ..., con un dato $[a_{k-1}]$ un $[k-1]$, e che giacciono in un dato $[a_k]$, essendo $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r$, r denotando la dimensione dello spazio ambiente, ed essendo sempre lo spazio $[a_i]$ immerso in $[a_{i+1}]$. La condi-

(1) A causa della inondazione del Tevere non potè aver luogo la seduta, che venne rimandata al 16 Dicembre.

zione a cui si assoggetta un $[k]$ imponendogli di giacere in una forma $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, la indicheremo con $(a_0, a_1, \ldots a_k)$: essa è di dimensione:

$$d = (k+1)\,r - \tfrac{1}{2}k(k+1) - \sum_{\kappa}^{0} a_i \text{ (}^1\text{)}.$$

1. Dimostriamo che:

Se in un sistema $\infty^{(k+1)(r-k)}$ algebrico di coppie S, S′ *di* $[k]$ *si trovano un numero finito di coincidenze, questo numero è espresso da*

(1) $$x = \sum (a_0, a_1, \ldots, a_k)\,(r - a_k, \ldots, r - a_0)',$$

ove il simbolo $(a_0, a_1, \ldots, a_k)\,(r - a_k, r - a_{k-1}, \ldots, r - a_0)'$ *denota il numero delle coppie il cui spazio* S *appartiene alla forma* $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, *mentre lo spazio* S′ *corrispondente appartiene alla forma coniugata* $[r - a_k, \ldots, r - a_0]$, *e il sommatorio è esteso a tutti i possibili prodotti del tipo di quello scritto.*

Suppongasi la (1) valida in $[r-1]$ e in $[r-2]$. Nella varietà data V di coppie di $[k]$ separiamo una varietà ∞^1, v, costituita dalle coppie incidenti secondo $[k-1]$ di un dato iperpiano π, e ognuna delle quali è contenuta in un $[k+1]$ insieme ad un punto dato O. Fissiamo quindi in $[r]$ un fascio di $[r-k-1]$ (entro un dato $[r-k]$), e chiamiamo omologhi due $[r-k-1]$ del fascio quando ad uno determinato di essi appoggiasi uno spazio S e all'altro uno spazio S′ con quello accoppiato nella varietà V. In virtù del principio di corrispondenza di Chasles, avremo $y + y'$ coincidenze, y denotando il numero delle coppie della ∞^1 che hanno lo spazio S appoggiato a un dato $[r-k-1]$, e y' denotando il numero analogo con lo scambio di S in S′. Tali coincidenze si presentano:

a) Negli spazî $[r-k-1]$ del dato fascio a cui si appoggiano gli x spazî $[k]$ che noi ricerchiamo.

b) Nei t spazî $[r-k-1]$ che passano per i punti d'intersezione del dato $[r-k]$, con la varietà dei $[k-1]$ secondo cui si intersecano le coppie della varietà v.

c) Nei z spazî $[r-k-1]$ che congiungono il sostegno del fascio con le traccie sul dato $[r-k]$ dei $[k+1]$ appoggiati al sostegno suddetto, e ognun dei quali congiunge due spazî S, S′ di v.

Dunque:

(2) $$x = y + y' - t - z.$$

La y esprime il numero delle coppie S, S′ incidenti secondo $[k-1]$ di π, i cui spazî congiungenti passano per O, e i cui spazî S appoggiansi a un dato $[r-k-1]$, che chiamiamo ω. Profittando della conservazione del numero suppongasi ω in π. Se lo spazio S di una coppia che soddisfaccia alle condizioni richieste, non giace in π, dovrà lo spazio intersezione rela-

(1) Queste notazioni sono state introdotte da Schubert, a cui è pure dovuto il concetto di *forma fondamentale*, nel senso più generale.

tivo a quella coppia appoggiarsi ad ω in un punto, e così noi otterremo t coppie; che se poi S giace in π, allora incontra di necessità ω in un punto, diguisachè così otterremo tante coppie S, S′ quante sono quelle che sono incidenti secondo $[k-1]$, il cui spazio S giace in π, e il cui spazio congiungente passa per O. E quest'ultimo numero lo otteniamo facendo corrispondere due $[k]$ s, s' di π, quando s' è proiezione da O di uno spazio S che insieme ad s fa parte della varietà V.

Mentre s descrive la forma

$$[a_0, a_1, \dots, a_k], \quad 0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r-1,$$

lo spazio $S (\equiv s)$ descrive in $[r]$ la medesima forma, e mentre s' descrive la forma

$$[r-1-a_k, \dots, r-1-a_0],$$

coniugata della precedente in $[r-1]$, lo spazio S′ descrive la forma

$$[r-a_k, \dots, r-a_0],$$

coniugata in $[r]$ di quella descritta da S, e che ottiensi dalla forma descritta da s' mediante proiezione da O. Siccome abbiamo supposto che la (1) fosse vera in $[r-1]$, avremo che la corrispondenza ultimamente considerata è dotata di:

$$\sum (a_0, a_1, \dots, a_k)(r-1-a_k, \dots, r-1-a_0)' = \sum (a_0, a_1, \dots, a_k)(r-a_k, \dots, r-a_0)',$$

$$0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r-1,$$

coincidenze (1). Quindi:

$$y = t + \sum (a_0, \dots, a_k)(r-a_k, \dots, r-a_0)', \quad 0 \leq a_0 < \cdots < a_k \leq r-1,$$

e analogamente:

$$y' = t + \sum (a_0, \dots, a_k)'(r-a_k, \dots, r-a_0), \quad 0 \leq a_0 < \cdots < a_k \leq r-1.$$

Ed allora la (2) dà:

$$(3) \quad x = \sum (a_0, \dots, a_k)(r-a_k, \dots, r-a_0)' + \sum (a_0, \dots, a_k)'(r-a_k, \dots, r-a_0) + t - z,$$

$$0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq r-1.$$

Il numero t indica quante coppie S, S′ incidenti secondo $[k-1]$ di π, hanno lo spazio congiungente passante per O, e lo spazio intersezione appoggiato a un dato $[r-k-1]$, e sia ω, immerso in π. Assumiamo il punto O in ω. Se il $[k-1]$ intersezione di una coppia che soddisfaccia alle condizioni richieste, non passa per O, incontra ω in un punto diverso da O; e in tal modo si hanno u coppie S, S′ incidenti secondo $[k-1]$ di π, ognuno dei quali appoggiasi a un dato $[r-k-1]$ di π, in guisa che lo spazio $[k+1]$ congiungente della medesima coppia passi per un punto dato nello

(1) S'intende che il prodotto simbolico che comparisce nel primo membro è riferito alla varietà delle coppie s, s', mentre quello che comparisce nel secondo è riferito alla varietà V.

spazio $[r-k-1]$ suddetto; se poi il $[k-1]$ intersezione di una coppia S, S′ passa per O, sono senz' altro soddisfatte tutte le condizioni domandate.

Il numero τ delle coppie S, S′ incidenti secondo $[k-1]$ di π, i quali passano per un dato punto O ivi, può determinarsi mediante la corrispondenza fra gli $\infty^{(k-1)(r-k)}$ spazî $\varLambda\varLambda'$, a $k-2$ dimensioni, che si ottengono come proiezioni rispettive da O in un dato $[r-2]$ di π, degli spazî S, S′ accoppiati in V e passanti per O.

Mentre $\varLambda$ descrive in $[r-2]$ la forma

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{k-2}], \quad 0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_{k-2} \leq r-2,$$

lo spazio S, da cui $\varLambda$ proviene, descrive in $[r]$ la forma

$$[0, b_0+1, b_1+1, \ldots, b_{k-2}+1, r].$$

E così mentre $\varLambda'$ descrive la forma

$$[r-2-b_{k-2}, \ldots, r-2-b_0],$$

coniugata di quella descritta da $\varLambda$, lo spazio S′ corrispondente descrive la forma

$$[0, r-1-b_{k-2}, \ldots r-1-b_0, r],$$

coniugata da quella descritta da S. Se poniamo $b_i+1=a_{i+1}$, avremo, in virtù della (1) per ipotesi valida in $[r-2]$,

$$\tau = \sum (0, a_1, \ldots, a_{k-1}, r)(0, r-a_{k-1}, \ldots, r-a_1, r)', \quad 1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} \leq r-1.$$

Onde

$$t = u + \sum (0, a_1, \ldots, a_{k-1}, r)(0, r-a_{k-1}, \ldots, r-a_1, r)', \quad 1 \leq a_1 < \cdots < a_{k-1} \leq r-1.$$

Per trovare un' espressione del numero z delle coppie S, S′ incidenti secondo $[k-1]$ di π, i cui $[k+1]$ congiungenti passano per O, e si appoggiano a un dato $[r-k-2]$, σ, si supponga lo spazio σ e il punto O in π (senza, beninteso, che O giaccia in σ). Se nè lo spazio S, nè lo spazio S′ di una delle coppie cercate, giacciono in π, il $[k-1]$ loro intersezione appoggiasi allo spazio $\omega(\equiv \sigma O)$ in un punto, e il $[k+1]$ che li congiunge passa per O; onde in tal modo abbiamo u coppie. Se poi lo spazio intersezione di una delle coppie domandate non si appoggia ad ω, gli spazî S,S′ di quella coppia giacciono ambedue in π, ed allora richiedendo solo che lo spazio congiungente passi per O, è soddisfatta la rimanente condizione, che cioè tale spazio si appoggi a σ.

Per cui noi dovremo ora calcolare il numero ζ delle coppie S, S′ che giacciono in π, sono incidenti secondo $[k-1]$, ed hanno lo spazio congiungente passante per O. E questo numero possiamo calcolarlo facendo corrispondere due $[k]$ di π, e siano $\varGamma$ e $\varGamma'$, quando proiettano rispettivamente da O sopra un dato $[r-2]$ di π, gli spazî S, S′ accoppiati in V e giacenti entrambi in π.

Siccome quando Γ si muove nella forma

$$[b_0, b_1, ..., b_k], \quad 0 \leq b_0 < \cdots < b_k \leq r-2$$

lo spazio S descrive la forma

$$[b_0+1, b_1+1, ..., b_k+1],$$

e quando Γ' si muove nella forma

$$[r-2-b_k, ..., r-2-b_0],$$

lo spazio S′ si muove nella forma

$$[r-1-b_k, ..., r-1-b_0],$$

ponendo $b_i+1=a_i$, sempre perchè la (1) s' è supposta vera in $[r-2]$, avremo:

$$\zeta = \sum (a_0, ..., a_k)(r-a_k, ..., r-a_0)', 1 \leq a_0 < a_1 \cdots < a_k \leq r-1,$$

e quindi;

$$z = u + \sum (a_0, ..., a_k)(r-a_k, ..., r-a_0)', \quad 1 \leq a_0 < \cdots < a_k \leq r-1.$$

Dalla (3) segue:

$$x = \sum (a_0, ..., a_k)(r-a_k, ..., r-a_0)' + \sum (a_0, ..., a_k)'(r-a_k, ..., r-a_0) + \tau - \zeta,$$

e siccome ζ contiene tutti i prodotto simbolici comuni ai due sommatori di questa formola, mentre τ contiene quei termini che pur comparendo nel 2° membro della (1), non compariscono in nessuno dei sommatori della formola ora scritta, riducendo si ha precisamente per x l' espressione fornita della (1). Dal momento che la (1) medesima è valida nel piano (¹) e nello spazio ordinario (²), sarà vera sempre.

2. Della (1) erano noti finora due casi particolari: e cioè il caso di $k=0$, e il caso di $k=1$ (e quindi, dualmente, il caso di $k=r-1$ e di $k=r-2$) (³).

Come applicazione immediata della (1) si può ritrovare un notevole teorema dovuto a Schubert, sul numero dei $[k]$ comuni a due sistemi conve-

(¹) Cfr. Salmon, *Geometry of three dimen.* (1865, pag. 511) e Zeuthen, Comptes Rendus, 1874.

(²) Cfr. Schubert, *Beiträge zur abzählenden Geometrie* (Math. Ann., Bd. X, 1876): e *Kalkül der abz. Geo.*, Leipzig, 1879.

(³) Per il caso di K = 0 cfr. un frammento nelle *Memorie di Geometria* del Caporali, intitolato: *Sulla teoria degli spazî a più dimensioni*; una Nota del prof. Pieri, *Sul principio di corrispondenza*, ecc. (Rend. dei Lincei, marzo 1887) e un' altra Nota del medesimo sulle *Formole di coincidenza per le serie algebriche*, ecc. (Rend. di Palermo, t. V, 1881). Per il caso di K = 1 cfr. Pieri, *Sulla corrispondenza algebrica fra due spazî rigati* (Atti della R. Acc. di Torino, t. 25, 1889).

nientemente infiniti (1). Se in $[r]$ si ha un sistema ∞^h di $[k]$ e un sistema $\infty^{h'}$ pure di $[k]$ ed è $h + h' = (k+1)(r-k)$, i due sistemi hanno (in generale) un numero finito di spazî a comune, espresso dalla formola:

$$x = \sum (a_0, a_1, \dots, a_k)(r - a_k, \dots, r - a_0)'$$

il simbolo $(a_0, \dots, a_k)$ riferendosi ai $[k]$ del sistema ∞^h e l'altro simbolo ai $[k]$ del sistema $\infty^{h'}$.

Basta, per ottenere questa proposizione, accoppiare ogni $[k]$ del sistema ∞^h ad ogni $[k]$ del sistema $\infty^{h'}$, e applicare la (1) a questa serie $\infty^{(k+1)(r-k)}$ di coppie di $[k]$.

Chimica. — *Sulle soluzioni solide nelle miscele di tre sostanze.* Nota II, di G. Bruni e F. Gorni, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota precedente uno di noi ha studiato teoricamente come procedano i fenomeni d'equilibrio fisico (solubilità e congelamento) nelle miscele di tre sostanze in cui abbia luogo la formazione di soluzioni solide.

Fra i diversi tipi in cui vennero distinte sotto questo rapporto le miscele ternarie, il più semplice fra tutti è quello dato da tre sostanze tutte isomorfe fra loro, e che possano formare cristalli misti in tutti i rapporti. In tal caso non potendosi mai avere che una sola fase solida, e per conseguenza non potendosi formare nè sistemi invarianti nè monovarianti, si ha una unica superficie di congelamento limitata dalle tre curve di congelamento delle tre miscele binarie possibili.

Questo fatto dedotto teoricamente non era però ancora stato verificato sperimentalmente non essendosi finora, a quanto ci risulta, eseguite esperienze sul congelamento dei miscugli di tre sostanze isomorfe.

Noi abbiamo ora eseguito un certo numero di determinazioni sul congelamento delle miscele isomorfe di p. bicloro-, p. clorobromo-, e p. bibromobenzolo. Dell'isomorfismo esistente fra queste tre sostanze e delle curve di congelamento delle miscele binarie parlammo già in un nostro lavoro precedente (2).

In esso però non vennero dati che i risultati numerici relativi ai tratti estremi delle curve, i quali pel problema che allora ci proponevamo erano i più interessanti. Diamo qui ora i risultati completi, ed inoltre quelli relativi alle miscele ternarie.

(1) Cf. Schubert, *Lösung der Charakteristiken-Problems*, ecc. (Mittheilungen der Math. Gesell. in Hamburg, t. I, 1886, pag. 134).

(2) Questi Rendiconti, 1899, 2° sem., 184 segg.