ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCVII.

1900

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME IX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1900

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 dicembre 1900.

A. MESSEDAGLIA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla integrazione della equazione $\Delta_2 u = 0$ nello spazio indefinito non-euclideo.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. È noto che le formole di trasformazione di integrali multipli, dovute a Green, possono estendersi a spazî di quante si vogliano dimensioni e con una espressione qualunque per l'elemento lineare [1]. Per le funzioni armoniche (soddisfacenti cioè all'equazione $\Delta_2 u = 0$) degli spazî a due o a tre dimensioni di curvatura costante segue di qui che vale ancora il teorema della media aritmetica di Gauss, e cioè: ogni funzione armonica, regolare entro un circolo od una sfera rispettivamente, assume nel centro il valore che è la media aritmetica dei valori al contorno. Ne risulta che gli ordinarî teoremi sui massimi e minimi delle funzioni armoniche, sull'unicità della funzione in un campo qualsiasi per assegnati valori al contorno ecc. si trasportano inalterati dallo spazio euclideo agli spazî di curvatura costante.

Applicate al caso di un campo a due dimensioni, queste considerazioni non dànno alcun nuovo risultato. Tuttavia è utile che ci fermiamo a dimostrare come per esse si riconosca *a priori* l'esistenza della celebre formola di Poisson, che per mezzo di un integrale definito risolve il problema di Dirichlet per un campo circolare.

Per ciò, dato nel piano un circolo C

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

(1) Vedi Beltrami, *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, § 4.

stabiliamo nel piano stesso sia una metrica euclidea, assumendo la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

pel quadrato dell'elemento lineare, sia una metrica non-euclidea, ponendo invece

$$ds'^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\eta^2},$$

dove η indica la distanza di un punto (x, y) variabile nel piano da una retta esterna al circolo. Anche in questa metrica non-euclidea sarà C un circolo a centro reale [1] e precisamente il centro O′ non-euclideo sarà quel punto interno a C pel quale vengono a passare tutti i circoli che sono normali simultaneamente a C ed alla retta $\eta = 0$ (che hanno i centri su questa retta).

Ora l'equazione $\Delta_2 u = 0$ delle funzioni armoniche è sempre la medesima nell'una o nell'altra metrica. Se supponiamo adunque assegnati sulla periferia di C i valori che deve assumere la nostra funzione armonica u, assoggettati alla sola condizione di formare una catena continua U, il valore di u nell'ordinario centro O sarà la media euclidea dei valori U al contorno e medesimamente il valore di u in O′ sarà la media non-euclidea dei valori U al contorno. Ma, variando la posizione della retta $\eta = 0$, possiamo collocare O′ in un punto qualsiasi dell'area circolare distinto da O, onde riconosciamo *a priori* l'esistenza di una formola che esprime per un integrale definito il valore di u in un punto interno qualsiasi. Per scrivere effettivamente questa formola, che coinciderà necessariamente colla formola di Poisson, resta soltanto da tradurre in analisi le considerazioni geometriche precedenti.

Sia $O' \equiv (x', y')$ il punto ove si vuole calcolare il valore di u. La retta $\eta = 0$, che rappresenta l'assoluto della metrica non-euclidea nella quale O′ è il centro di C, non è altro che la retta perpendicolare alla OO′ nel punto medio fra O′ ed il suo coniugato armonico rispetto a C; essa ha quindi per equazione

$$\mathrm{R}^2 + \varrho'^2 - 2(xx' + yy') = 0 \tag{1}$$

$$(\varrho'^2 = x'^2 + y'^2).$$

Conseguentemente si ha

$$\eta = \frac{\mathrm{R}^2 + \varrho'^2 - 2(xx' + yy')}{2\varrho'} \tag{2}$$

ed indicando con a il raggio non-euclideo di C, a causa della formola

$$ds' = \frac{ds}{\eta},$$

[1] Appunto perchè il centro non-euclideo O′ riesca reale prendiamo la retta $\eta = 0$ esterna a C.

avremo:

$$a = \log \frac{\eta'}{\eta''},$$

dove η', η'' indicano le rispettive distanze dalla retta (1) del punto O' e dell' estremo del raggio OO'. Dalla (2) abbiamo

$$\eta' = \frac{R^2 - \varrho'^2}{2\varrho'}, \quad \eta'' = \frac{(R - \varrho')^2}{2\varrho'},$$

indi

$$a = \log \frac{R + \varrho'}{R - \varrho'},$$

da cui

$$\operatorname{senh} a = \frac{2R\varrho'}{R^2 - \varrho'^2}.$$

La periferia non-euclidea di C essendo data da

$$2\pi \operatorname{senh} a = \frac{4\pi R\varrho'}{R^2 - \varrho'^2},$$

pel valore $u(x', y')$ di u in O' avremo

$$u(x', y') = \frac{R^2 - \varrho'^2}{4\pi R\varrho'} \int_s U \frac{ds}{\eta}.$$

Se si fanno le ordinarie posizioni

$$x = R\cos\theta, \quad y = R \operatorname{sen}\theta$$
$$x' = \varrho'\cos\theta', \quad y' = \varrho' \operatorname{sen}\theta',$$

quest' ultima si muta subito nella formola di Poisson:

$$u(x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U \frac{R^2 - \varrho'^2}{R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos(\theta - \theta')} \, d\theta.$$

2. Passando ora dal piano allo spazio a tre dimensioni, consideriamo la sfera S di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

e sopra la superficie S supponiamo distribuiti dei valori U che costituiscano una funzione continua. Definiamo quindi nell' interno di S una funzione u che nel centro O abbia per valore la media aritmetica dei valori U al contorno ed in ogni altro punto $O' \equiv (x', y', z')$ abbia per valore la media *non-euclidea* dei medesimi valori U, quando per l' elemento lineare ds' dello spazio si assuma

(2*) $$ds'^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\eta^2} = \frac{ds^2}{\eta^2},$$

indicando con η la distanza di un punto qualunque (x, y, z) dal piano normale alla OO′ nel punto medio fra O′ ed il suo coniugato armonico rispetto alla sfera S sul raggio stesso. Per tal modo veniamo ad attribuire allo spazio la curvatura costante negativa $K = -1$ ed il punto O′ viene a coincidere col centro *non-euclideo* della sfera S (cfr. n. 1) (¹).

Dimostreremo che: *La funzione* $u(x, y, z)$ *così definita nell'interno di* S *è finita e continua, insieme alle sue derivate di tutti gli ordini, ed ivi soddisfa l'equazione a derivate parziali*:

$$\text{(I)}\quad (R^2 - x^2 - y^2 - z^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + 2\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0;$$

movendo poi dall'interno di S *verso un punto qualunque del contorno in qualsiasi direzione i valori di* u *convergono equabilmente verso il valore* U *prefissato in quel punto.*

Così viene risoluto, con una formola d'integrale definito, il problema di integrare la equazione (I) con valori assegnati per u sulla superficie sferica S; e al n. 4 si proverà poi che il problema ammette questa unica soluzione.

Per trovare intanto la formola in questione, sulla quale dovremo verificare le proprietà enunciate nel teorema, basterà procedere come al n. 1. Troviamo così:

$$\eta = \frac{R^2 + \varrho'^2 - 2(xx' + yy' + zz')}{2\varrho'}, \quad (\varrho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

L'elemento $d\sigma'$ d'area non-euclidea della sfera S sarà

$$d\sigma' = \frac{d\sigma}{\eta^2},$$

indicando con $d\sigma$ l'ordinario elemento d'area sferica. D'altronde pel raggio a non-euclideo di S abbiamo, come al n. 1:

$$\operatorname{senh} a = \frac{2R\varrho'}{R^2 - \varrho'^2}$$

e quindi l'area totale non-euclidea A di S sarà

$$A = 4\pi \operatorname{senh}^2 a = \frac{16\pi R^2 \varrho'^2}{(R^2 - \varrho'^2)^2}.$$

(¹) Prendiamo la forma particolare (2*) per l'elemento lineare dello spazio a curvatura costante per rendere più semplici i calcoli. Ma i risultati finali a cui si perviene, rimarrebbero identici assumendo un'altra qualunque metrica ove lo spazio riesca a curvatura costante (negativa o positiva) ed il punto O′ risulti ancora, in questa metrica, il centro della sfera S.

Per la media non-euclidea $u(x', y', z')$ dei valori U avremo dunque

$$u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi \operatorname{senh}^2 a} \int_S U \frac{d\sigma}{\eta^2}.$$

Ponendo per η e $4\pi \operatorname{sen} h^2 a$ i valori sopra trovati ed indicando con γ l'angolo formato dalla direzione OO' con quella che da O va al punto variabile M d'integrazione su S, abbiamo la formola definitiva:

$$\text{(II)} \qquad u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S U \frac{(R^2 - \varrho'^2)^2 \, d\sigma}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma)^2}.$$

Questa offre, come si vede, la più grande analogia colla formola di Poisson che risolve il problema di Dirichlet pel campo sferico.

3. Procedendo ora alle verifiche delle proprietà enunciate per la funzione $u(x', y', z')$ definita dalla (II), cominciamo da quelle relative *all'interno* di S, che si fanno con somma facilità. Basta osservare infatti che la funzione di x', y', z'

$$\text{(3)} \qquad W = \frac{(R^2 - \varrho'^2)^2}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma)^2},$$

che comparisce sotto il segno integrale nella (II), finchè si rimane nell'interno di S, avendo il punto (x, y, z) una posizione qualunque sul contorno, è finita e continua rispetto a questi parametri x', y', z' e possiede derivate di tutti gli ordini pure finite e continue. Dunque la $u(x', y', z')$ è finita e continua in tutto l'interno di S e possiede derivate di tutti gli ordini pure finite e continue, che si ottengono eseguendo nella (II) le corrispondenti derivazioni sotto il segno integrale.

Per dimostrare poi che la $u(x', y', z')$ soddisfa all'equazione lineare ed omogenea (I):

$$(R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}\right) + \\ + 2\left(x' \frac{\partial u}{\partial x'} + y' \frac{\partial u}{\partial y'} + z' \frac{\partial u}{\partial z'}\right) = 0,$$

basterà provare che vi soddisfa la W definita dalla (3). Ora se poniamo per un momento

$$r^2 = R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

$$V = \frac{R^2 - \varrho'^2}{r^2},$$

troviamo subito

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x'} &= \frac{-2x'}{r^2} - \frac{2(x'-x)}{r^2} V \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} &= -\frac{2}{r^2} - \frac{2V}{r^2} + \frac{8x'(x'-x)}{r^4} + \frac{8(x'-x)^2}{r^4} V \end{aligned}\right.$$

e quindi, essendo $W = V^2$:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x'} &= -\frac{4x'}{r^2} V - \frac{4(x'-x)}{r^2} W \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} &= -\frac{4V}{r^2} - \frac{4W}{r^2} + \frac{32x'(x'-x)}{r^4} V + \frac{24(x'-x)^2}{r^4} W + \frac{8x'^2}{r^4}. \end{aligned}\right.$$

Scrivendo le formole analoghe per le derivate rapporto ad y', z' ed osservando che si ha

$$2x'(x'-x) + 2y'(y'-y) + 2z'(z'-z) = r^2 + \varrho'^2 - R^2,$$

ne segue subito l'identità asserita

$$(R^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2}\right) + \\ + 2\left(x'\frac{\partial W}{\partial x'} + y'\frac{\partial W}{\partial y'} + z'\frac{\partial W}{\partial z'}\right) = 0.$$

Le verifiche pel contorno si fanno poi in modo perfettamente analogo come per la formola di Poisson. Si osservi per ciò che, se facciamo $U = 1$, anche la media (non-euclidea) $u(x', y', z')$ sarà $= 1$; sussiste quindi la formola fondamentale:

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{4\pi R^2}\int_s \frac{(R^2 - \varrho'^2)^2\, d\sigma}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho'\cos\gamma)^2} = 1.$$

Ora consideriamo un punto qualunque M_0 della superficie sferica ed indichiamo con U_0 il valore di U in M_0; a causa della (3) potremo scrivere la (II) sotto la forma:

$$\text{(4)} \qquad u(x', y', z') - U_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\int (U - U_0)\frac{(R^2 - \varrho'^2)^2\, d\sigma}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho'\cos\gamma)^2}.$$

Essendo ora ε un numero positivo piccolo ad arbitrio, limitiamo attorno ad M_0 come centro una calotta sferica σ' di raggio sferico abbastanza piccolo perchè si abbia sopra σ'

$$|U - U_0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ciò che, a causa della continuità supposta nei valori U, è sempre possibile. Indicando con σ'' la calotta complementare di σ' ($\sigma' + \sigma'' = S$), decomponiamo l'integrale del secondo membro della (4) nei due integrali estesi a σ', σ'' rispettivamente. Ne dedurremo subito:

$$|u(x', y', z') - U_0| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma'} \frac{(R^2 - \varrho'^2)^2\, d\sigma}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma)^2} +$$
$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma''} |U - U_0| \frac{(R^2 - \varrho'^2)^2\, d\sigma}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma)^2},$$

e per la (III), a più forte ragione

$$(5) \quad |u(x', y', z') - U_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma''} |U - U_0| \frac{(R^2 - \varrho'^2)^2\, d\sigma}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma)^2},$$

formola che vale dovunque sia (x', y', z') nell'interno di S. Ora consideriamo un intorno di M foggiato, per fissare le idee, nel modo seguente. Descritta una calotta interna e concentrica a σ', costruiamo il cono che la projetta dal centro O e prendiamo pel detto intorno la regione del cono esterna ad una sfera concentrica ed interna a S, ma di raggio ϱ' sufficientemente prossimo a R. Se manteniamo $M' \equiv (x', y', z')$ in questo intorno ed indichiamo con b la minima distanza dei punti dell'intorno dai punti della calotta σ'', avremo manifestamente sopra tutta σ'':

$$(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma)^2 \geq b^4.$$

D'altronde, indicando con D la massima oscillazione dei valori U al contorno, è sempre

$$|U - U_0| \leq D,$$

e per ciò

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_{\sigma''} |U - U_0| \frac{(R^2 - \varrho'^2)^2\, d\sigma}{(R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma)^2} \leq \frac{D(R^2 - \varrho'^2)^2}{4\pi R^2 . b^4} \int_{\sigma''} d\sigma < \frac{D}{b^4}(R^2 - \varrho'^2)^2.$$

Quest'ultima quantità, prendendo ϱ' sufficientemente vicina a R, si può rendere piccola a piacere, p. e. $< \frac{\varepsilon}{2}$, e la (5) ci dà allora

$$|u(x', y', z') - U_0| < \varepsilon,$$

ciò che dimostra appunto come i valori di u nel detto intorno convergano *in egual grado* verso U_0 *c. d. d.*

4. I risultati a cui siamo così pervenuti possono ricevere una nuova interpretazione quando si riguardi lo spazio euclideo, interno alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, come immagine (conforme) dello spazio non-euclideo nel

quale la detta sfera rappresenta l'*assoluto*. Basta per ciò assumere come forma dell' elemento lineare dello spazio

$$(6)\qquad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(R^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2},$$

venendo così ad attribuire allo spazio la curvatura costante negativa

$$K = -4R^2.$$

Ma allora l'equazione fondamentale (I) viene ad assumere la forma

$$\Delta_2 u = 0$$

per lo spazio d'elemento lineare (6).

Ne concludiamo: *La funzione* u, *determinata dalla formola* (II), *è una funzione armonica dello spazio non-euclideo* (6); *essa è regolare insieme con tutte le sue derivate a qualunque distanza finita in questo spazio e allontanandosi all'infinito verso un determinato punto, su qualunque cammino, i suoi valori convergono equabilmente verso il valore* U *prefissato* (¹).

Possiamo dunque riguardare, conformemente al titolo della presente Nota, come risoluto dalla formola (II) il problema di Dirichlet per lo spazio indefinito non-euclideo.

Le considerazioni precedenti servono altresì a provare l'*unicità* della funzione armonica u cogli assegnati valori U all'infinito. E invero, se ne esistesse una seconda u_1, la differenza $u - u_1$ sarebbe armonica in tutto lo spazio e convergerebbe (equabilmente) verso zero allontanandosi all'infinito. Dal teorema di Gauss della media segue allora che in tutto lo spazio $u - u_1 = 0$.

5. Se, prescindendo da ogni interpretazione di geometria non-euclidea, si vuole provare direttamente come colla formola (II) venga a determinarsi quella soluzione u della (I), che assume sul contorno sferico S i valori assegnati U, basta dimostrare direttamente la (III), dalla quale dipendono le verifiche al contorno.

A questo si perviene colle considerazioni seguenti, suggeritemi dal prof. Dini. Posto come sopra

$$r^2 = R^2 + \varrho'^2 - 2R\varrho' \cos\gamma,$$

(¹) I punti all'infinito si potranno manifestamente individuare coi raggi che da un punto fisso O dello spazio muovono verso di essi; i valori U prefissati all'infinito debbono formare una funzione continua delle due variabili che individuano il raggio.

sviluppiamo $\frac{1}{r}$ in serie di funzioni sferiche colla nota formola

$$\frac{1}{r}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varrho'^n}{R^{n+1}}\,P_n(\cos\gamma)\,.$$

Indicando con Ω il primo membro della (III), avremo

$$\Omega=\frac{(R^2-\varrho'^2)^2}{4\pi R^2}\int_s\left(\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varrho'^n}{R^{n+1}}\,P_n(\cos\gamma)\right)\frac{d\sigma}{r^3}$$

ed, applicando l'integrazione termine a termine alla serie convergente in egual grado, potremo scrivere:

$$\Omega=\frac{R^2-\varrho'^2}{R^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varrho'^n}{R^n}\left(\frac{1}{4\pi R}\int_s\frac{(R^2-\varrho'^2)\,P_n(\cos\gamma)\,d\sigma}{r^3}\right).$$

Ma, per la formola di Poisson, l'integrale

$$\frac{1}{4\pi R}\int_s\frac{(R^2-\varrho'^2)\,P_n(\cos\gamma)\,d\sigma}{r^3}$$

non è altro che il valore in (x',y',z') di quella funzione armonica che sulla sfera prende i valori $P_n(\cos\gamma)$. E poichè questa funzione armonica è notoriamente

$$\frac{\varrho^n}{R^n}\,P_n(\cos\gamma)\,,$$

e nel punto (x',y',z') si ha $\cos\gamma=1$, il valore del detto integrale risulterà $=\frac{\varrho'^n}{R^n}$. Ne concludiamo

$$\Omega=\left(1-\frac{\varrho'^2}{R^2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varrho'^{2n}}{R^{2n}}=1\,,$$

ciò che dimostra appunto la (III).

Osserviamo in fine che se si applica lo sviluppo precedente per funzioni sferiche alla formola (II), si ottiene l'altra

$$u(x',y',z')=\left(1-\frac{\varrho'^2}{R^2}\right)\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varrho'^n}{R^n}\cdot\frac{1}{4\pi R}\int_s\frac{(R^2-\varrho'^2)\,UP_n}{r^3}\,d\sigma\,.$$

Ora l'integrale

$$\frac{1}{4\pi R}\int_s\frac{(R^2-\varrho'^2)\,UP_n\,d\sigma}{r^3}$$

rappresenta, per la formola di Poisson, il valore che assume in (x',y',z') la funzione armonica u_n che sulla superficie sferica prende i valori $UP_n(\cos\gamma)$.

Indicando questo valore con u'_n, abbiamo dunque per l'integrale u della equazione (I) il notevole sviluppo in serie:

$$u' = \left(1 - \frac{\varrho'^2}{R^2}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varrho'^n}{R^n} u'_n ,$$

che vale in tutto l'interno della sfera.

6. È facile estendere i risultati precedenti al caso di un numero qualunque n di variabili, come vogliamo qui da ultimo stabilire.

Nello spazio euclideo ad n dimensioni, dove $x_1, x_2, \ldots x_n$ indicano coordinate cartesiane ortogonali di un punto mobile, si consideri l'ipersfera

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$$

e su questa ipersfera si assegnino i valori di una funzione continua U, del resto arbitraria. Fissiamo poi nei punti interni $O' \equiv (x'_1, x'_2 \ldots x'_n)$ i valori di una funzione u nel modo seguente: quando O′ è nell'ordinario centro O dell'ipersfera prendasi per u la media (euclidea) dei valori U al contorno, ed in caso opposto la media *non-euclidea* di quei medesimi valori in quella metrica non-euclidea nella quale O′ risulta centro dell'ipersfera. Colle notazioni stesse dei numeri precedenti, indicando con ds l'ordinario elemento lineare, con ds' l'elemento lineare non-euclideo, potremo prendere:

$$ds' = \frac{ds}{\eta},$$

essendo

$$\eta = \frac{R^2 + \varrho'^2 - 2\sum x_i x'_i}{2\varrho'}$$

$$(\varrho'^2 = \sum x_i'^2).$$

e per un punto $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ dell'ipersfera

$$\eta = \frac{R^2 + \varrho'^2 - 2 R\varrho' \cos\gamma}{2\varrho'}.$$

Per il raggio non-euclideo a dell'ipersfera vale ancora la formola

$$\operatorname{sen\,h} a = \frac{2R\varrho'}{R^2 - \varrho'^2}$$

e quindi per la sua area totale A avremo:

$$A = (\operatorname{sen\,h} a)^{n-1}\, \varpi ,$$

dove ϖ indica l'area di un'ipersfera di raggio $=1$ nello spazio S_n euclideo. Si ha, come è noto [1]

$$\varpi = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Ne risulta per $u(x'_1, x'_2 \dots x'_n)$ la formola:

$$\text{(IV)} \quad u(x'_1, x'_2, \dots x'_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}} . \mathrm{R}^{n-1}} \int_s \mathrm{U} \frac{(\mathrm{R}^2 - \varrho'^2)^{n-1}\, d\sigma}{(\mathrm{R}^2 + \varrho'^2 - 2\mathrm{R}\varrho' \cos\gamma)^{n-1}},$$

ove $d\sigma$ denota l'ordinario elemento (euclideo) d'area dell'ipersfera e l'integrale del secondo membro è esteso a tutta l'ipersfera S.

Con verifiche del tutto analoghe a quelle dei casi precedenti, si vedrà che questa funzione $u(x'_1, x'_2 \dots x'_n)$ è regolare colle sue derivate di tutti gli ordini *nell'interno* dell'ipersfera S e coll'avvicinarsi di $\mathrm{O}' \equiv (x'_1, x'_2 \dots x'_n)$ al contorno tende equabilmente verso i valori prefissati U. Inoltre essa soddisfa nell'interno dell'ipersfera all'equazione a derivate parziali:

$$\left(\mathrm{R}^2 - \sum_i x_i'^2\right) \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2} + 2(n-2) \sum_i x_i' \frac{\partial u}{\partial x_i'} = 0\,;$$

questa non è altro che l'equazione:

$$\Delta'_2 u = 0,$$

calcolata nella metrica non-euclidea d'elemento lineare

$$ds'^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{\left(\mathrm{R}^2 - \sum_i x_i^2\right)^2}.$$

Per $n=2$ la (IV) coincide colla formola di Poisson pel cerchio, per $n=3$ colla (II) num. 2; in generale possiamo dire:

La formola (IV) *risolve il problema di Dirichlet per lo spazio indefinito non-euclideo ad n dimensioni.*

[1] V. p. e. Kronecker, *Vorlesungen*, Ier Bd, pag. 266.